

Иван КАНАТОВ, к. т. н.  
Дмитрий КАПЛУН, к. т. н.  
Андрей БУДИЛОВ

## Особенности реализации банка цифровых фильтров

### Введение

Характерной чертой широкого частотного диапазона является наличие большого числа источников излучений, которые могут работать на разной частоте, с разным типом модуляции и т. д. Главная же задача, например, мониторинга, как в военной, так и в гражданской сфере, заключается в отслеживании и обнаружении излучений от таких источников с минимальными потерями и в реальном масштабе времени. Для этого необходимо одновременно обрабатывать информацию от всех источников, что приводит к огромным аппаратным затратам и не всегда возможно сделать, используя классические методы и алгоритмы ЦОС.

При такой параллельной обработке неизбежна многоканальность. Самое простое решение — это применение БПФ. Однако широко известные дефекты БПФ приводят к тому,

что при сложных видах модуляции, особенно при использовании их сочетаний, БПФ уже не может удовлетворить потребности в необходимом качестве обработки исследуемых частотных диапазонов. Поэтому в 1970-х годах был предложен метод под названием «банк цифровых фильтров». Со временем банк цифровых фильтров совершенствовался, модифицировался, и в настоящее время существует несколько его разновидностей.

Рассмотрим классическую структуру банка цифровых фильтров, покажем, как можно его модифицировать и использовать для задач мониторинга широкого частотного диапазона.

### Банк цифровых фильтров

Цифровой нерекурсивный фильтр нижних частот (ФНЧ) описывается классическим выражением [1]:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i). \quad (1)$$

Из всего частотного диапазона такой фильтр выделит узкую полосу, причем для вещественного сигнала нижней границей такого фильтра будет нулевая частота, а для комплексного сигнала нулевая частота будет соответствовать центру полосы пропускания. На рис. 1 приведены использованные ниже обозначения характерных точек АЧХ. Дальнейшее обсуждение будем вести для комплексного сигнала, обозначив его частотный диапазон  $\pm\omega_d/2$ .

Чтобы выделить другую часть частотного диапазона тем же ФНЧ, нужно гетеродинированием свести к нулю центральную частоту  $\omega_k$  этого поддиапазона. Тогда (1) будет иметь вид:

$$y_k(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=-N/2}^{N/2-1} b_i x(n-i) e^{j\omega_k(n-i)}. \quad (2)$$

Таким способом можно перекрыть весь исследуемый частотный диапазон единственным фильтром, характеристика которого может быть близка к идеальной: обеспечивать минимальное наложение соседних каналов, равномерную частотную характеристику в полосе пропускания и желаемый коэффициент подавления. Пример реальной частотной характеристики двух соседних каналов представлен на рис. 2.

Сравним (2) с классической формулой взвешенного ДПФ:

$$X(k, n) = \frac{1}{M} \sum_{i=-M/2}^{M/2-1} a_i x(n-i) e^{-j\omega_k i}, \quad (3)$$

где  $X(k, n)$  —  $k$ -я гармоника ДПФ в момент времени  $n$ ;  $a_i$  — коэффициенты весового окна.

Полное сходство этих формул демонстрирует дуальность ДПФ, которое можно рассматривать и как спектральное преобразование, и как совокупность цифровых фильтров. Различие этих формул состоит только в длине интервала суммирования, индексе времени при экспоненте и в выборе весовых коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$ . Разница в индексе времени при экспоненте вызвана тем, что при гетеродинировании сигнала гетеродин функционирует независимо от сигнала и поэтому привносит в результат анализа некую

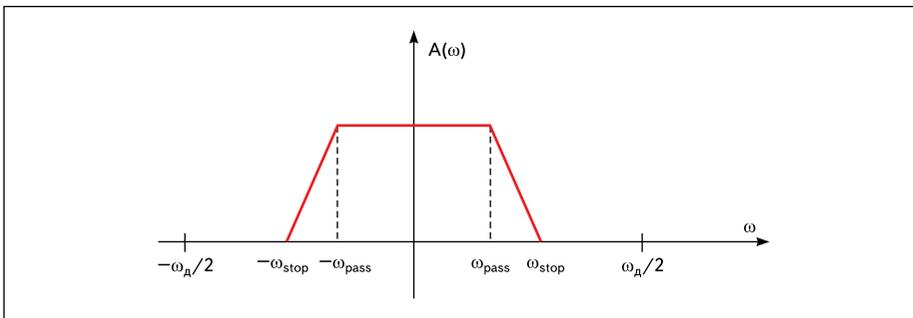


Рис. 1. АЧХ цифрового фильтра нижних частот

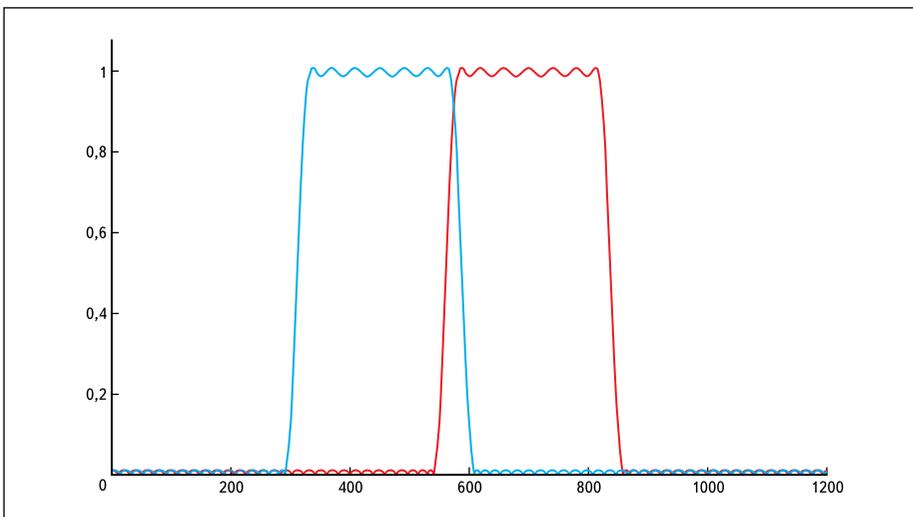


Рис. 2. АЧХ двух соседних каналов

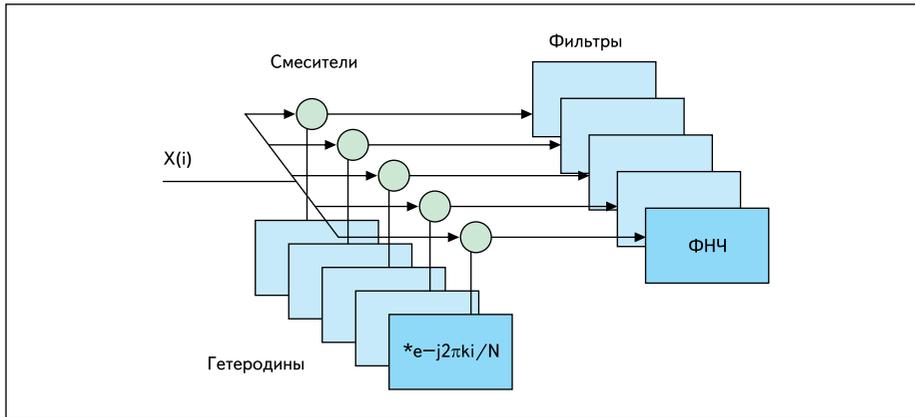


Рис. 3. Многоканальная фильтрация с гетеродинированием

начальную фазу; при преобразовании Фурье для каждого  $n$  выбранные отсчеты сигнала на интервале анализа ( $-N/2 < i < N/2$ ) умножаются на функции базиса, всегда начинающиеся с нулевой фазы.

Таким образом, поэлементное произведение  $x(n-i)e^{-j\omega_0 i}$  в формуле (3) — это операция, выполняемая смесителем; операции же суммирования и взвешивания выполняют функции ФНЧ-фильтра (рис. 3).

Если убрать коэффициенты  $a_p$ , останется прямоугольное временное окно, приводящее к трем известным дефектам ДПФ: наложению соседних каналов, неравномерности частотной характеристики и большому уровню боковых лепестков. Попытки устранить все три дефекта весовыми окнами Ханнинга, Ханна, Кайзера и т. п., сохраняющими интервал осреднения, равный количеству спектральных составляющих, дали возможность подавить боковые лепестки, но лишь за счет усиления двух других дефектов [2].

Беда всех этих окон в том, что они только сужали интервал анализа во временной области, что неизбежно приводило к расширению полосы частот.

Для того чтобы частотные характеристики каналов не перекрывались, интервал, на котором происходит взвешивание сигнала, должен быть больше интервала ДПФ-анализа. Фактически нужно сначала сформировать взвешивающим окном желаемую форму частотной характеристики, а потом проводить ДПФ.

Если снять ограничение на длину интервала взвешивания  $N = M$  и заменить более простым:  $N = L \times M$ ;  $L = 2, 3, 4, \dots$ , то есть  $N$  брать больше, но кратно интервалу ДПФ-анализа, то подбором взвешивающего окна можно задать любую форму частотной характеристики фильтра. Это позволит обеспечить и отсутствие перекрытия соседних каналов, и максимально равномерную характеристику в полосе пропускания. Фактически взвешивающее окно — это импульсная характеристика КИХ-фильтра желаемой формы для одного канала. Использование более длинного весового окна стало возможным за счет

перестановки операций гетеродинирования и суммирования, что вытекает из линейности преобразования Фурье.

Это и послужило идеей появления различных реализаций банков цифровых фильтров: ДПФ с расширенным весовым окном, конвейерного частотного преобразования (КЧП) и т. д. Отличие этих методов состоит в подходе к упрощению аппаратной реализации банков фильтров [3].

### ДПФ с расширенным весовым окном

Рассмотрим подробно один из этих методов — ДПФ с расширенным весовым окном, где используется БПФ как совокупность описанных выше операций гетеродинирования и суммирования. В этом методе весовые коэффициенты фильтра и их количество выбираются исключительно для получения желаемой частотной характеристики канала.

Если число каналов  $M$  банка фильтров задано, открытым остается только вопрос выбора коэффициента удлинения  $L$  интервала взвешивания. Решить этот вопрос помогают следующие два свойства НЧ-фильтров:

1) При увеличении ширины полосы пропускания фильтра в  $m$  раз количество коэффициентов фильтра уменьшается во столько же раз. Аналогичное соотношение верно и для случая уменьшения ширины полосы пропускания.

Если взять импульсную характеристику фильтра и «выколоть» каждый второй отсчет (децимация в 2 раза, но не сигнала, а импульсной характеристики), получится фильтр с тем же коэффициентом прямоугольности, но с  $\omega_{stop}^* = 2\omega_{stop}$ . Это свойство можно использовать, например, при синтезе перестраиваемого фильтра с заданной прямоугольностью частотной характеристики.

2) Увеличение крутизны наклона частотной характеристики НЧ-фильтра (уменьшение  $\omega_{stop} - \omega_{pass}$ ) возможно только за счет пропорционального увеличения числа его коэффициентов, то есть величины  $L$ .

Рассмотрим зависимость коэффициента прямоугольности от  $L$  на примере фильтра Баттерворта. Модуль его частотной характеристики задается выражением:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{pass}}\right)^{2N}}, \quad (4)$$

где  $N$  — порядок фильтра,  $\omega_{pass}$  — частота среза.

По формуле (4) в MATLAB произведено моделирование и получена зависимость коэффициента прямоугольности от  $L$ . График этой зависимости показан на рис. 4.

Как видно на графике, при стандартных требованиях к коэффициенту прямоугольности  $K_{пр} = 1,1-1,2$  целесообразно задавать параметр  $L$  в пределах 13–17.

Моделирование в MATLAB показало, что обеспечение перекрытия менее 5% требует выбора  $L \geq 16$ .

Естественно, на выбор  $L$  влияют и коэффициент пульсации в полосе пропускания, и величина подавления на частотах выше  $\omega_{stop}$ .

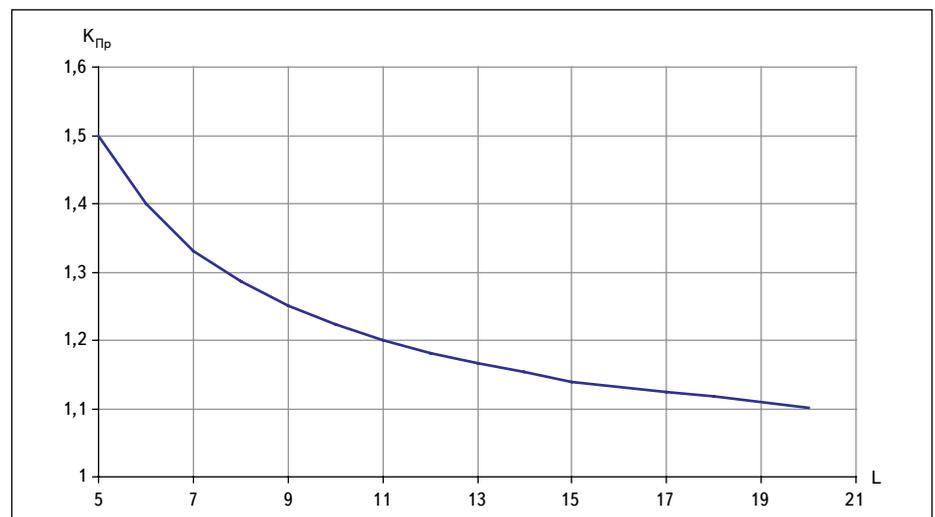


Рис. 4. Зависимость коэффициента прямоугольности от L

Поскольку уровень пульсаций для фильтров Чебышева существенно больше, чем у фильтров Баттеворта, рассмотрим зависимость величины пульсаций от  $L$  для фильтров Чебышева первого рода [1]:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\omega}{\omega_{pass}}\right)}}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon$  — показатель пульсаций,  $T_N$  — полином Чебышева  $n$ -степени,  $\omega_c$  — частота среза.

Корни полиномов  $T_N(x)$  вычисляются по формуле [1]:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right), \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Параметр  $\varepsilon$  определяется из максимально допустимого отклонения  $\delta_1$  АЧХ в полосе пропускания [1]:

$$\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}. \quad (7)$$

Исходя из требований к отклонениям АЧХ как в полосе пропускания  $\delta_1$ , так и в полосе задерживания  $\delta_2$ , определяется порядок  $N$  (а значит, в нашем случае и значение  $L$ ) как наименьшее целое, соответствующее условию [1]:

$$N \geq \frac{\text{Arch}\left(\frac{\sqrt{1 - \delta_2^2}}{\varepsilon \delta_2}\right)}{\text{Arch}(\omega_{stop})}, \quad (8)$$

где  $\text{Arch}$  — обратный гиперболический косинус.

На рис. 4 и по формуле (8) видно, что чем больше  $L$ , тем проще обеспечить требуемую равномерность характеристики и коэффициент прямоугольности.

Чтобы вернуться к выбранной длине интервала ДПФ-анализа, взвешенная последовательность длины  $N = L \times M$  разбивается на  $L$  блоков по  $M$  отсчетов, после чего эти блоки накладываются друг на друга и поэлементно суммируются. Каждый  $i$ -й отсчет наложенной последовательности,  $i = (1, M)$ , определяется выражением:

$$z(i) = \sum_{n=0}^{L-1} x(nM+i) \times a(nM+i), \quad (9)$$

где  $N = L \times M$ ;  $n$  — номер блока,  $n = (0, L-1)$ ;  $a()$  — коэффициенты фильтра.

Далее над полученными  $M$  отсчетами проводится ДПФ. Поэлементное сложение блоков длины  $M$  взвешенной последовательности допустимо, так как все используемые в ДПФ комплексные экспоненты укладываются в  $M$  отсчетах целое число периодов, поэтому каждый  $M$ -й отсчет умножается на одно и то же значение.

Таким образом, перед операцией БПФ произошла неполная операция фильтрации: по-

сле взвешивания необходимо было бы просуммировать все отсчеты, а суммировались только отсчеты, отстоящие на  $M$ . Доведение до конца операции сложения осуществляется сумматором БПФ. Преимущество такого подхода очевидно: на длине  $L$  производится не  $L$  БПФ-преобразований, а всего одно.

Оценим число операций типа сложение-умножение, приходящееся на один отсчет входного комплексного сигнала. Для КИХ-фильтра, поскольку его коэффициенты — вещественные числа, число операций при их умножении на комплексные входные отсчеты равно  $2L \times M$ . Стандартная оценка числа операций для комплексного БПФ достаточно точно аппроксимируется величиной  $M/2 \times \log_2 M$  [4] комплексных умножений, что соответствует  $2M \times \log_2 M$  простых умножений. Тогда на вычисление одного выходного отсчета во всех каналах банка фильтров приходится  $2M(L + \log_2 M)$  операций. Это приближенная оценка, не учитывающая особенностей структуры ПЛИС, приспособленной для ЦОС. Используемая формула для подсчета количества операций БПФ растет круче линейной зависимости от  $M$ . По технической документации на ПЛИС эта зависимость оказывается гораздо более пологой, чем просто линейная.

Поскольку при подобной фильтрации частота на выходе фильтров будет в  $M$  раз меньше частоты входного сигнала, следующее преобразование можно выполнять через  $M$  входных отсчетов. Фактически это эквивалентно децимации фильтрованного сигнала, а количество операций на один отсчет будет равно всего  $2(L + \log_2 M)$ . На практике обычно имеет место перекрытие АЧХ соседних каналов. Перекрытие вызвано тем, что невозможно получить идеально прямоугольную форму АЧХ взвешивающего окна. Это означает, что частотная полоса в каждом канале будет несколько шире, чем  $F_s/M$ . Следовательно, после децимации в  $M$  раз выходной сигнал будет искажен (рис. 5).

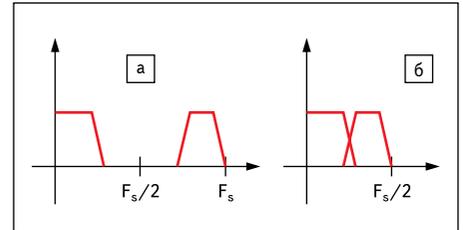


Рис. 5. Иллюстрация эффекта наложения при децимации: а) дискретный спектр исходного сигнала; б) дискретный спектр сигнала после децимации в 2 раза

Поэтому для устранения нежелательных эффектов децимации будем проводить следующее преобразование не через  $M$ , а через  $M/2$  входных отсчетов, создавая таким образом двукратный запас по частоте дискретизации выходного сигнала. Тогда общее число операций на один отсчет частоты дискретизации будет:

$$\frac{2M \times L + 2M \log_2 M}{M/2} = 4(L + \log_2 M). \quad (10)$$

Например, при числе фильтров  $M = 32$  и  $L = 12$  число операций на один отсчет равно 68, а при  $M = 1024$  — всего 88. Фактически, определяющим фактором вычислительной сложности является не ДПФ, а цифровой фильтр, от требований к форме которого зависит  $L$ . Отметим, что при практической реализации операции над вещественными и мнимыми частями отсчетов проводятся параллельно, так же одновременно проводятся операции взвешивания следующей группы отсчетов и БПФ предыдущей при конвейерной организации алгоритма. Параллелизация и конвейеризация позволяют значительно ускорить анализ.

Здесь следует отметить принципиальную разницу между традиционным БПФ-анализом и реализуемым банком фильтров. При обычном вычислении спектра времен-

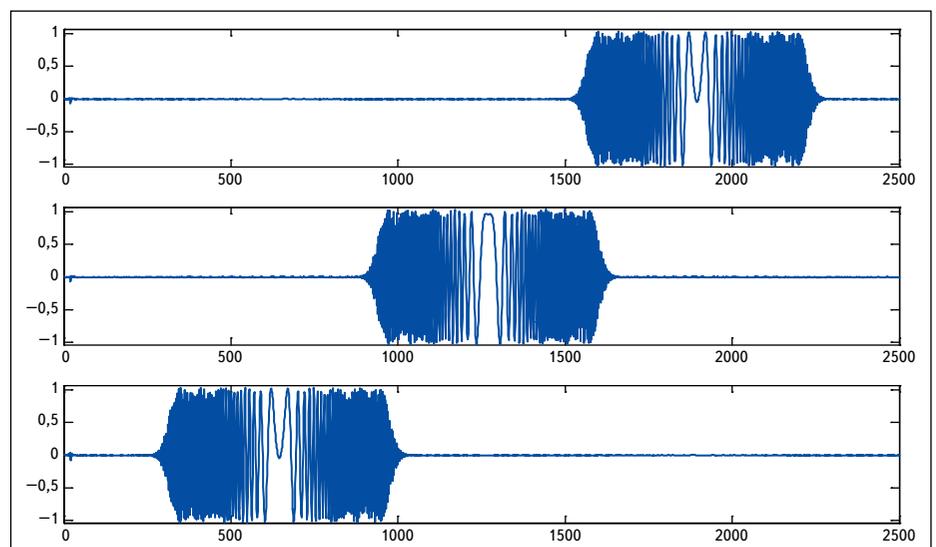


Рис. 6. Фильтрация сигнала с линейно нарастающей частотой в трех соседних каналах

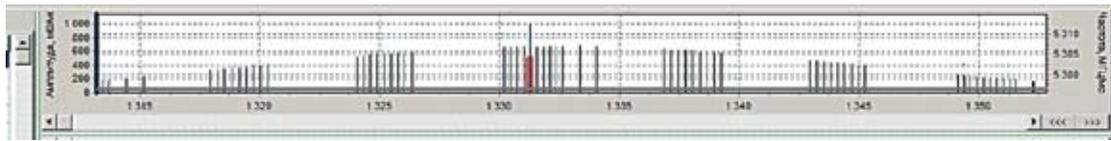


Рис. 7. Сигнал РЛС

ной интервал между выборками можно выбирать произвольно, и он зависит только от скорости изменения спектра. Для банка фильтров базисные функции Фурье — это опорные частоты гетеродинов, транспонирующих спектр. Поэтому сдвиг во времени в исходном сигнале должен сопровождаться точно таким же сдвигом всех функций базиса. Это связано с тем, что результатом преобразования банком цифровых фильтров является временной процесс, и введение в него любых фазовых сдвигов недопустимо. Если же следующий анализ начинается со сдвигом не на  $M$ , а на  $M/2$ , все нечетные составляющие получают сдвиг фазы на  $180^\circ$ . Их переверт требует дополнительных операций.

Из (10) не следует, что число каналов ДПФ может быть сколь угодно велико. С ростом  $M$  все сложнее получить желаемую форму АЧХ. При достаточно больших  $M$  либо вообще невозможно получить взвешивающее окно, обеспечивающее желаемую форму АЧХ, либо его длина чрезмерно увеличивается за счет одновременного увеличения  $L$  и  $M$ . При практической реализации важно не только количество операций на один входной отсчет, но и длина взвешивающего окна  $N = L \times M$ , так как в памяти нужно хранить не только сами весовые коэффициенты окна, но и равное его длине количество комплексных входных отсчетов.

На рис. 6 представлена фильтрация гармонического сигнала с линейно нарастающей частотой в трех соседних каналах. Результат получен на банке фильтров, реализованном в ПЛИС Xilinx XC4VLX25, со следующими параметрами: число каналов 1024, максимальная частота дискретизации входного комплексно-го сигнала 100 МГц, длина фильтра — 13 302.

### Уточняющее преобразование

Выше уже отмечалась двойственность преобразований, осуществляемых банком цифровых фильтров: их результат можно рассматривать и как многоканальную фильтрацию с гетеродинированием и децимацией, и как результат Фурье-преобразования, осуществляющий перевод сигнала из временной области в частотную («скользящий спектр», периодограмма).

Оценить по достоинству структуру под названием «банк цифровых фильтров» можно только используя ее и в том, и в другом качестве. Поскольку в задачи мониторинга входят и задача очистки сигнала от шума, и за-

дача выделения сигналов заданной частоты (первичное обнаружение) и формы спектра (классификация цели по виду модуляции), и задачи вторичной обработки (декодирования, измерения параметров и т. п.), двойственность преобразования можно использовать в полной мере.

С этой целью и был разработан алгоритм последовательного трехступенчатого преобразования, названного «уточняющее преобразование». Алгоритм обработки на каждой ступени определяется как формой сигналов, так и конечной целью наблюдения, однако структура уточняющего преобразования остается единой для большого класса задач мониторинга. Практическая реализация разработанного алгоритма предназначалась для наблюдения за радиолокационной обстановкой, в частности за радиолокаторами морского базирования. На рис. 7 представлен типичный сигнал РЛС, использующий три вида модуляции: импульсную, частотную (ЧК) и фазовую (ФМн2). Естественно, рассмотреть в одном масштабе (с одним разрешением по частоте) формат пачек импульсов и внутреннюю структуру каждого импульса невозможно.

Уточнение идеально подходит для случаев, когда требуется более подробно рассмотреть спектральные компоненты в одном из каналов и нет необходимости детализировать

остальную часть спектра. С вычислительной точки зрения наиболее эффективно разбиение  $M$  на две равные части, при котором  $M = m_1 \times m_2 = m^2$ , где  $m_i$  — число каналов ДПФ на каждом шаге. Однако это не жесткое условие, так как повторное преобразование производится уже над децимированными отсчетами и не сказывается на скорости обработки.

Уточняющее преобразование состоит в том, что сигнал выбранного канала повторно подвергается описанному выше БПФ-преобразованию с тем же ФНЧ-фильтром, подверженным децимации в частотной области. В этом случае анализ сигнала разбивается на три этапа: на первом этапе исследователю предъявляется амплитудный спектр (или спектральная плотность мощности) всего частотного диапазона сигнала с достаточно грубым разбиением на каналы (например, на 64 канала). Поскольку сигналы РЛС имеют импульсный характер, регистрируются только максимальные значения. Предусмотрены две формы представления результата: либо в виде спектрограммы (сонограммы), либо в форме графика с временной горизонтальной осью.

Выбранный по этому спектру канал вновь разбивается на составляющие. Их количество произвольно, но кратно двум. На этом этапе исследователь может наблюдать уже не только амплитудный спектр сигнала (рис. 8), но и лю-

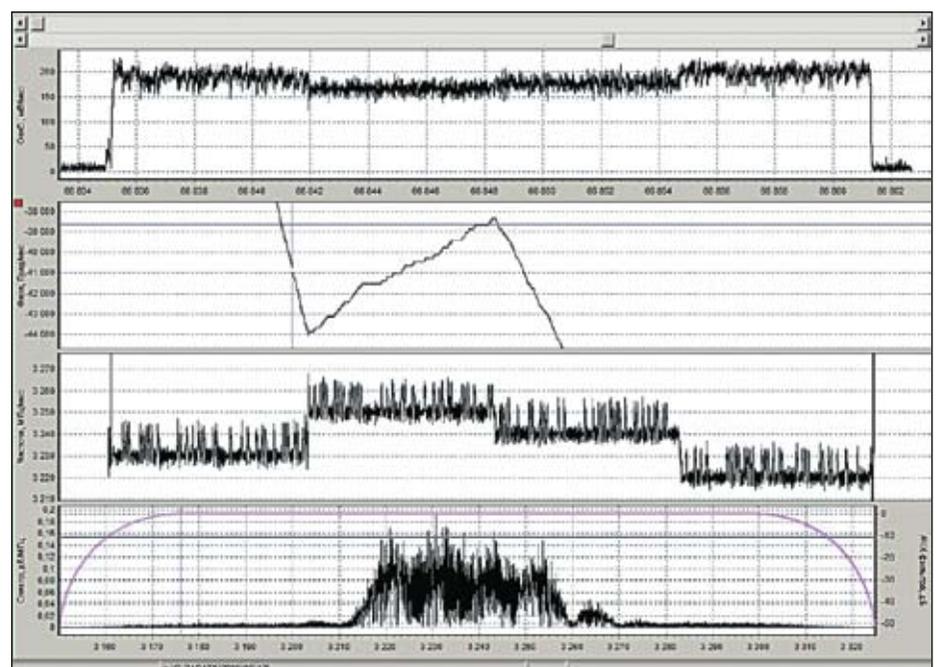
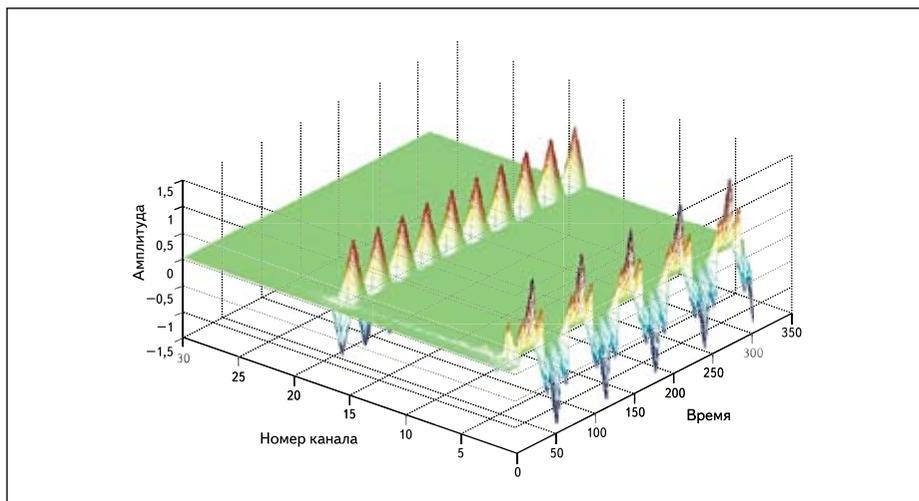


Рис. 8. Уточняющее преобразование сигнала РЛС



**Рис. 9.** Сигнал на выходе банка фильтров при входном сигнале, состоящем из четырех частот (три частоты в пятом канале и одна — в двадцатом)

бую выбранную частотную составляющую. Каждая из этих составляющих может быть выдана в двух формах: либо как предварительно гетеродинированная и отфильтрованная, либо просто в форме сигнала, пропущенного через узкополосный фильтр. Первая форма подразумевает децимацию исходного сигнала,

вторая использует восстановление исходного сигнала по децимированным отсчетам.

На третьем этапе уже может быть рассмотрена внутренняя структура импульса и определены основные его параметры. Естественно, временной интервал анализа на этом этапе соответствует длительности выбранного импульса.

Для оценки возможностей использования уточняющего преобразования был проведен эксперимент с последовательной трехступенчатой фильтрацией сигнала, состоящего из суммы четырех частот. При этом как при первом, так и при втором преобразовании все четыре частоты попадали в один канал. Только третье уточняющее преобразование позволило разделить эти сигналы (рис. 9). Как видно на рис. 9, не произошло искажение ни частоты, которая выделилась в двадцатом канале, ни тех частот, которые просуммировались в третьем канале. ■

## Литература

1. Солонина А. И., Улахович Д. А., Арбузов С. М., Соловьева Е. Б. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
2. Азаренков Л. Г., Канатов И. И., Каплун Д. И. Банк цифровых фильтров // Компоненты и технологии. 2007. № 10.
3. Каплун Д. И., Канатов И. И., Азаренков Л. Г., Будилов А. В. Частотно-временной анализ банком цифровых фильтров // Компоненты и технологии. 2009. № 3.
4. Рабинер Л., Голд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.