

Теоретические аспекты конечно-элементного моделирования состояний и функциональности магнитоуправляемых датчиков

Светлана СЫСОВЕВА
S.Sysoeva@mail.ru

В статье рассматриваются аспекты математического моделирования магнитоэлектронных, магнитодинамических и магнитотепловых (мультифизических) процессов, ответственных за функциональность магнитоуправляемых датчиков скорости и положения, и параллельно раскрываются моделирующие возможности и особенности конечно-элементного CAD/CAE-пакета FLUX Cedrat.

Введение

Магнитоуправляемые датчики скорости/положения представляют собой широко распространенный и перспективный класс сенсорных устройств в составе автомобильных, промышленных, аэрокосмических и других систем. Эти устройства отличаются бесконтактностью, готовым типом выхода, часто цифровым исполнением, достаточно высокой чувствительностью, стабильностью, надежностью и точностью. Чтобы разработать и гарантировать работу такого устройства в полном диапазоне рабочих условий, включая в анализ материалы и геометрию магнитной системы, допуски, рабочие температуры и другие параметры, стоит воспользоваться компьютерным конечно-элементным моделированием, которое способно дать хорошие результаты. Пример такого специализированного программного обеспечения — Flux Cedrat [1–9] (рис. 1).

Существуют три основных модели и/или состояния, которые характеризуют функциональность магнитоуправляемых датчиков, соответствующих приложениям (модулям) Flux:

- 1) Магнитоэлектронное (магнитное поле постоянное, источники поля — стационарные токи проводимости или постоянные стационарные магниты, в системе отсутствуют механическое движение источника или модулятора поля и наведенные токи), изучается в Flux MagnetoStatic.

- 2) Магнитоэлектронное (магнитное поле — установившееся переменное синусоидальное, источники поля — переменные токи, подвижные постоянные магниты и/или неподвижные постоянные магниты, стационарное поле которых синусоидально модулируется подвижным ферромагнитным/проводящим модулятором, в расчет принимаются наведенные токи, скин-эффект и эффект близости), соответствует приложению Steady state AC Magnetic Flux, но данный модуль не рассматривает магниты в качестве источников.

- 3) Переходные, соответствующие переходу системы из одного установившегося магнитоэлектронного или магнитодинамического состояния в другое и характеризующиеся переменным несинусоидальным состоянием источников и полей. Во Flux пе-

- 3) Переходные, соответствующие переходу системы из одного установившегося магнитоэлектронного или магнитодинамического состояния в другое и характеризующиеся переменным несинусоидальным состоянием источников и полей. Во Flux пе-

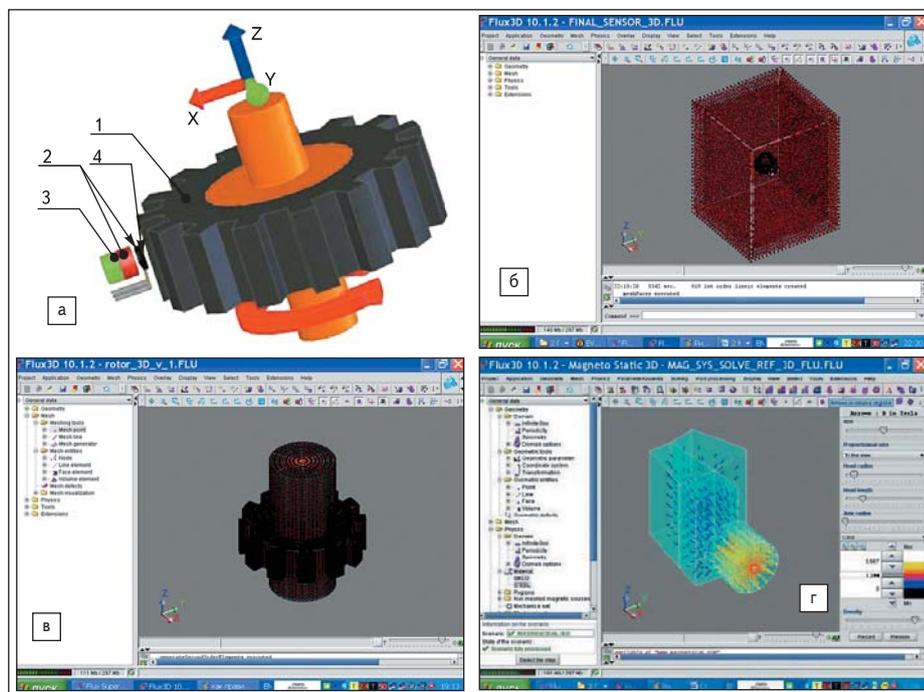


Рис. 1. Типичная задача, решаемая методом конечных элементов, — моделирование датчика ферромагнитного зубчатого ротора:

- а) постановка задачи: 1 — ферромагнитный зубчатый ротор; 2 — основные компоненты статора; 3 — обратно-сдвигающийся магнит; 4 — ИС датчика (дифференциальная ИС Холла TLE4921 Infineon); б–г) решение в рамках реализации конечно-элементного проекта во Flux v. 10.1.2:
- б) результат генерирования сетки для линий и контуров;
- в) результат генерирования сетки для элементов второго порядка Generate Second Order Elements;
- г) постобработка: изображение векторных результатов решения образцовой модели

реходные процессы изучаются посредством специализированного модуля Transient Magnetic, допускающего задание в качестве источников и переменных (несинусоидальных) токов, и магнитов, анализ наведенных токов, скин-эффекта и эффекта близости.

Магнитотепловое моделирование, также доступное во Flux, основано на существовании взаимодействия между электромагнитными и тепловыми аспектами процессов нагрева — вследствие вихревых токов.

Теоретические аспекты моделирования основных функциональных процессов, протекающих в датчиках (магнитных и магнитнотепловых), достаточно подробно рассматриваются в рамках данной статьи. Но нельзя не отметить, что возможности моделирования, предлагаемые Flux, шире. Так, возможность объединения с электрической схемой “circuit coupling” доступна пользователю в приложениях Transient Magnetic и Steady State AC Magnetic. Кинематический модуль Flux также допускает исследование подвижной части устройства вследствие механических сил (действия пружин, трения, гравитации).

Магнитостатическое моделирование

Магнитостатическое моделирование основывается на фундаментальных законах электромагнетизма — уравнениях Максвелла и конституционных соотношениях среды. В самом общем виде уравнения Максвелла (в дифференциальной форме) записываются как:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t, \\ \text{rot} \vec{H} &= \vec{j} + (\partial \vec{D} / \partial t), \\ \text{div} \vec{B} &= 0, \\ \text{div} \vec{D} &= q, \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{B} — плотность магнитного потока, \vec{j} — плотность тока, \vec{H} — напряженность магнитного поля, \vec{D} и \vec{E} — электрическое смещение и напряженность электрического поля соответственно, q — плотность статического заряда.

Соотношения для материалов записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \sigma \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}, \\ \vec{D} &= \epsilon \vec{E}, \end{aligned} \quad (2)$$

где σ — проводимость; μ — магнитная проницаемость; ϵ — диэлектрическая проницаемость.

В случае низкочастотных квазистатических электромагнитных полей выражения для электрических полей \vec{D} и \vec{E} , \vec{B} и \vec{H} могут быть разведены и рассмотрены отдельно.

Для чисто магнитной системы принимается гипотеза квазистатического состояния, вариацией плотности электрического потока \vec{D} можно пренебречь. Уравнения Максвелла тогда запишутся как

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= -\partial \vec{B} / \partial t, \\ \text{rot} \vec{H} &= \vec{j}, \\ \text{div} \vec{B} &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а соотношения материалов, которые принимаются в расчет, так:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \sigma \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu \vec{H}. \end{aligned} \quad (4)$$

Условия вычисления в магнитостатическом исследовании

Переменные состояния не зависят от времени, то есть $d/dt = 0$, вычисляются только B - и H -поля, D - и E -поля не вычисляются.

Наведенные токи не учитываются, и уравнения Максвелла для задач магнитостатики тогда записываются как

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H} &= \vec{j}, \\ \text{div} \vec{B} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

а соотношение материалов, которое принимается в расчет (только для связи магнитных параметров):

$$\vec{B} = \mu \vec{H}. \quad (6)$$

Это принципиальное соотношение для магнитных материалов может быть помещено в расчетную модель в виде $B(H)$ - или $H(B)$ -соотношений:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_r \mu_0 \vec{H}, \\ \vec{B} &= \mu_r \mu_0 \vec{H} + \vec{B}_r, \end{aligned} \quad (7)$$

где μ_r — относительная магнитная проницаемость среды; μ_0 — абсолютная магнитная проницаемость вакуума; \vec{B}_r — остаточный магнитный поток постоянных магнитов, или

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \nu_r \nu_0 \vec{B}, \\ \vec{H} &= \nu_r \nu_0 \vec{B} - \vec{H}_c, \end{aligned} \quad (8)$$

где ν_r — относительное удельное магнитное сопротивление среды; ν_0 — абсолютное удельное магнитное сопротивление вакуума; \vec{H}_c — коэрцитивная сила постоянных магнитов.

Закон Гаусса для магнетизма $\text{div} \vec{B} = 0$ также допускает введение магнитного векторного потенциала \vec{A} :

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (9)$$

Выражение для закона Ампера $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ позволяет дать выражение для магнитного скалярного потенциала:

$$\vec{H} = -\text{grad} \phi + \vec{T}, \quad (10)$$

где ϕ — магнитный скалярный потенциал; \vec{T} — вращательный или нулевой компонент поля источника или электрический векторный потенциал в А/м.

Некоторые геометрические аспекты конструирования магнитных систем

В соответствии с законом Ампера в электромагнитной схеме магнитное поле электрически возбуждаемой магнитной системы (рис. 2) определяется соотношением

$$\oint \vec{H} dl = I \times n, \quad (11)$$

где l — длина магнитного пути; n — число витков возбуждающей обмотки.

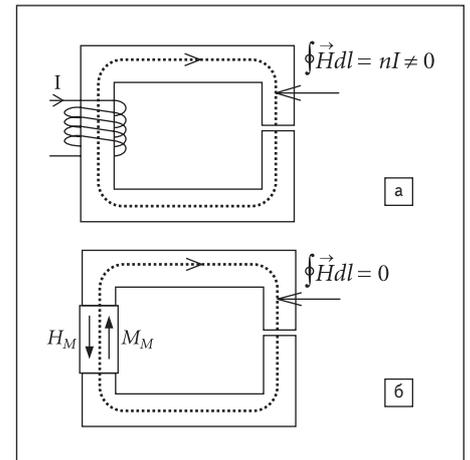


Рис. 2. Замкнутые электромагнитные схемы: а) электромагнитно возбуждаемая; б) магнитная система (возбуждаемая постоянным магнитом)

Для магнитной системы, возбуждаемой постоянным магнитом:

$$\oint \vec{H} \times dl = 0 \quad (12)$$

или

$$\vec{H}_B l_B + \vec{H}_\phi l_\phi + \vec{H}_M l_M = 0, \quad (13)$$

где \vec{H}_B — напряженность магнитного поля в воздухе; l_B — длина пути линий поля в воздухе; \vec{H}_ϕ — магнитное поле в ферромагнитном материале; l_ϕ — длина пути линий поля в ферромагнитном материале; \vec{H}_M — магнитное поле в магнитном материале; l_M — длина пути линий поля в магнитном материале.

При этом напряженности поля в ферромагнитной и воздушной частях замкнутой схемы будут характеризоваться тем же самым направлением, в магнитной — противоположным.

Согласно этой записи, увеличения магнитного поля в воздушном зазоре можно достичь, уменьшая воздушный зазор и увеличивая длину магнитно-ферромагнитного пути.

В пределах пути l_M постоянного магнита напряженность и индукция магнитного поля связаны соотношением:

$$\vec{B}_M = \mu_0 \vec{H}_M + \vec{M}_M, \quad (14)$$

где \vec{M}_M — намагничивание постоянного магнита, направление которого определяет на-

правление поля в контуре из ферромагнитной и воздушной частей схемы.

Поскольку и электрически, и магнитно возбуждаемые схемы бесконтактных датчиков конструируются так, чтобы выполнялось равенство

$$\vec{B}_M = \vec{B}_B = \vec{B}_\Phi,$$

перепишав (13) как

$$(B_B l_B / \mu_0) + (B_\Phi l_\Phi / \mu_r \mu_0) + ((B_M - M_M) / \mu_0) l_M = 0$$

и, далее, как

$$B_B l_B + (B_B l_\Phi / \mu_r) + (B_B - M_M) l_M = 0$$

$$\text{и } l_B + (l_\Phi / \mu_r) + l_M - (M_M l_M / B_B) = 0,$$

в итоге получим, что индукция в воздухе магнитной системы может рассчитываться по формуле:

$$B_B = M_M / (1 + (l_B / l_M) + (l_\Phi / \mu_r l_M)). \quad (15)$$

Из этой формулы явствует, что для увеличения поля в воздухе в схеме с постоянным магнитом должно выполняться соотношение:

$$l_M \gg l_B. \quad (16)$$

Соотношение $l_M > l_\Phi$ в датчиках можно на практике не принимать в расчет, так как $l_\Phi / (\mu_r \times l_M)$ — всегда малое значение из-за того, что μ_r , магнитная проницаемость стали, обычно >1000 . Тем не менее, ферромагнитную часть все же не следует делать превышающей по длине магнитную.

Однако длина ферромагнитного пути в сравнении с длиной воздушного пути — и в том случае, если магнитный участок отсутствует, и во всех остальных — должна быть значительно увеличенной, то есть

$$l_\Phi \gg l_B, \quad l_\Phi + l_M \gg l_B.$$

В электромагнитной схеме возбуждения, в которой магнитное поле в замкнутом контуре будет определяться выражением

$$\vec{H}_B l_B + \vec{H}_\Phi l_\Phi = nI \quad (17)$$

или сведенным к виду

$$(B_B l_B / \mu_0) + (B_\Phi l_\Phi / \mu_r \mu_0) = nI, \quad (18)$$

считая, что поле в каждой точке контура одинаково, получим, что магнитная индукция в зазоре будет также значительно зависеть от величины зазора l_B :

$$B_B = nI \mu_0 / (l_B + (l_\Phi / \mu_r)). \quad (19)$$

В то же время, если удастся выполнять условие (16), достаточно большие зазоры — порядка нескольких мм — могут не оказывать

влияния на величину поля в воздухе (хотя она и уменьшается по сравнению с реальным значением B_Φ) и не влиять на точность измерений.

Еще один важный практический аспект для геометрического конструирования датчиков — это возможность расширения воздушного зазора за счет увеличения поперечного сечения магнита или электромагнитно возбуждаемой ферромагнитной части.

Поскольку магнитный поток в замкнутом контуре принимается равным, то есть

$$B_M S_M = B_B S_B \quad (20)$$

это далее дает следующее выражение для индукции в воздушном зазоре (при идеальных условиях):

$$B_B l_B + (B_B l_\Phi / \mu_r) + (B_B (S_B / S_M) - M_M) l_M = 0,$$

$$B_B = M_M / ((S_B / S_M) + (l_B / l_M) + (l_\Phi / \mu_r l_M)), \quad (21)$$

и при соблюдении условия (16) и большом значении μ_r выражение (21) аппроксимируется к виду:

$$B_B = M_M / (S_B / S_M) = (M_M S_M) / S_B \quad (22)$$

то есть увеличение индукции определяется также фактором S_M / S_B .

Существуют и могут быть разработаны еще более развернутые аналитические методы технической оценки полей датчиков — с учетом рабочих точек кривых намагничивания магнитов и разнообразных факторов утечки. Но аналитические модели прежде всего полезны для упрощенного решения какой-то частной прикладной задачи. В рамках данной статьи подробно обсуждаются именно универсальные конечно-элементные, а не упрощенные аналитические модели для конкретных и идеальных условий и набора принятых допущений.

Магнитостатическое моделирование во Flux

Во Flux существует приложение Magneto Static, позволяющее получать следующие принципиальные результаты:

- распределение напряженности магнитного поля H , плотности магнитного потока B , плотности магнитной энергии dW_m ;
- расчет магнитной энергии в регионе W_m во всем домене исследования, силы F_m и магнитного крутящего момента T_m ;
- магнитный поток, пересекающий поверхность или навивку.

Основные этапы магнитостатического исследования включают:

- магнитостатическое исследование образцовой модели, решение опорного сценария;
- физическое параметризованное исследование;
- геометрическое параметризованное исследование.

Для решения используются две модели:

- векторная модель с вычислением переменной состояния магнитного векторного потенциала \vec{A} , введение которого допускает закон Гаусса для магнетизма;
- скалярная модель с вычислением магнитного скалярного потенциала, записываемого как ϕ_{tot} или ϕ_{red} .

2D-модуль Flux обеспечивает решение только векторной модели, 3D-модуль — и векторной, и скалярной. По умолчанию 3D-решатель использует векторную модель для 2D-приложений и скалярную для 3D-приложений. Но в дальнейшем на деталях работы с Flux в рамках данной статьи внимание не акцентируется, отчасти в связи с предшествующей публикацией ряда практических руководств именно по магнитостатическому моделированию магнитоуправляемых датчиков во Flux [2–7].

Для векторной модели решаемое во Flux уравнение записывается как

$$rot(v_0 [v_r] rot(\vec{A}) - \vec{H}_c) = \vec{j}_s, \quad (23)$$

где $[v_r]$ — тензор относительного удельного сопротивления среды; \vec{j}_s — поверхностная плотность источника тока (в A/m^2).

Для скалярной модели \vec{T} выбирается различным образом, и этот выбор приводит к различным скалярным потенциалам и применению различных магнитных формулировок во Flux 3D. Каждая область задачи связывается со своей формулировкой, но в общем виде форма решаемого в магнитостатическом приложении уравнения записывается как

$$div([\mu_r] \mu_0 (-grad(\phi) + \vec{T}) + \vec{B}_r) = 0, \quad (24)$$

где $[\mu_r]$ — тензор относительной магнитной проницаемости среды; ϕ — магнитный скалярный потенциал (ϕ_{tot} или ϕ_{red}); \vec{T} — векторная характеристика источника поля; \vec{B}_r — остаточный магнитный поток магнитов.

Существуют три основных ситуации, относящиеся к источникам:

- источников тока нет;
- источники не покрываются сеткой;
- источники покрываются сеткой.

Соответствующие им уравнения представлены далее.

Тотальный скалярный потенциал ϕ_{tot} используется при отсутствии токовых источников. Плотность тока j равна нулю. Напряженность поля выражается как

$$\vec{H} = -grad(\phi_{tot}), \quad (25)$$

и решаемое уравнение представляет собой

$$div([\mu_r] \mu_0 (-grad(\phi_{tot}) - \vec{B}_r) = 0, \quad (26)$$

ϕ_{tot} является переменной состояния, относительно которой решается уравнение (26).

Редукционный магнитный скалярный потенциал, соответствующий H_j или ϕ_{redH_j} ис-

пользуется, когда источники — не покрываемого сеткой типа. Во Flux это единичные объекты (entity), которые могут быть круговой, прямоугольной или более сложной формы. Это случай, когда $\vec{T} = \vec{H}_p$ и H_j вычисляется аналитически с использованием закона Био-Савара-Лапласа. Закон позволяет рассчитать магнитное поле в точке P , созданное проводником с током I , без присутствия магнитных материалов как:

- элементарное

$$d\vec{H}(P) = (1/4\pi)Id\vec{l} \times (\vec{r}/r^3); \quad (27)$$

- тотальное

$$\vec{H}(P) = (1/4\pi)\oint Id\vec{l} \times (\vec{r}/r^3). \quad (28)$$

В приведенных выражениях \vec{r} — это вектор между элементом $d\vec{l}$ проводника и точкой P .

Для поверхностного или объемного вычисления тока выражения (27) и (28) должны быть переписаны: $Id\vec{l}$ заменяется на $\vec{j}_s dS$ и $\vec{j}_v dV$ соответственно.

Магнитное поле, создаваемое источником, не покрываемым сеткой, записывается как H_j . Магнитное поле в магнитостатической системе тогда выражается как

$$\vec{H} = -grad(\phi_{redH_j}) + \vec{H}_j, \quad (29)$$

а решенное уравнение представляет собой

$$div([\mu_r]\mu_0(-grad(\phi_{redH_j}) + \vec{H}_j) - \vec{B}_r) = 0, \quad (30)$$

где ϕ_{redH_j} — переменная состояния.

Кроме того, магнитное поле может быть наложенным (например, магнитное поле Земли).

Редукционный магнитный скалярный потенциал, соответствующий T_0 или ϕ_{redT_0} , используется, когда источники — сетчатого типа, для которых

$$rot\vec{T}_0 = \vec{j}_s, \quad (31)$$

но может использоваться и с несетчатыми источниками, для которых

$$rot\vec{T}_0 = \vec{j}_s + rot\vec{H}_j. \quad (32)$$

Магнитное поле выражается как

$$\vec{H} = -grad(\phi_{redT_0}) + \vec{T}_0, \quad (33)$$

а решенное уравнение представляет собой

$$div([\mu_r]\mu_0(-grad(\phi_{redT_0}) + \vec{T}_0) - \vec{B}_r) = 0, \quad (34)$$

где ϕ_{redT_0} и \vec{T}_0 — переменные состояния.

Описание модели во Flux включает:

- описание границ и граничных условий;
- описание материальных сред (воздушных, магнитных/ферромагнитных материалов, источников тока);
- описание источников поля (постоянных магнитов, DC тока, наложенного поля).

Таблица 1. Локальные и глобальные параметры постобработки магнитостатических результатов решения во Flux 2D/3D

Параметры	Единицы измерения	Объяснение
Локальные 2D-параметры		
Векторный потенциал: • для плоской задачи — A_{2D} • для осесимметричной задачи — rA_{2D}	Вб/м Вб	
Напряженность магнитного поля, \vec{H}	А/м	$\vec{H} = \text{rot}A_{2D}$
Плотность магнитного потока, \vec{B}	Тл	$\vec{B} = [\mu]\vec{H}$
Магнитный поток, Φ (Φ_{P1P2} — магнитный поток через поверхность, неограниченную линиями, нормальными к домену исследования, передаваемый посредством точек $P1$ и $P2$)	Вб	$\Phi_{P1P2} = (A_{2D1}A_{2D2})P$, где p — толщина домена плоской задачи
Проницаемость, μ	Гн/м	
Плотность тока источника, I_2	А/мм ²	
Лапласова сила (локальное значение), \vec{F}_L	Н/м ³	$\vec{F}_L = \vec{j} \times \vec{B}$
Глобальные 2D-параметры		
Магнитная сила, \vec{F}_m (Force)	Н	$\vec{F}_m = \partial W_m / \partial l$, l — элементарное линейное перемещение
Магнитная сила, \vec{F}_m (Magnetic Pressure)	Н	Интегрирование поверхностных сил (тензорный метод Максвелла)
Магнитный крутящий момент, \vec{T}_m (Torque)	Н/м	$\vec{T}_m = \partial W_m / \partial \theta$, θ — элементарное угловое перемещение
Лапласова сила, \vec{F}_L (stress)	Н	$\vec{F}_L = \int_V \vec{j} \times \vec{B} dV$
Магнитная энергия, W_m	Дж	$W_m = \int_V dW_m dV = \int_V (\vec{H} d\vec{B}) dV$. Для линейной изотропной однородной среды: $dW_m = (1/2)HdB = (1/2)\mu H^2 = (1/2)(B^2/\mu)$
Магнитная энергия Energy/Co-Energy	Дж	$\int_V (\vec{H} d\vec{B}) dV$
Ток (источника), I (Current)	А	$I = \int_S j_s dS$
Магнитный поток в области, Φ (Inductance/Flux)	Вб	$\Phi = \int_A A_{2D} dl$
Индуктивность, L (Inductance/Inductance)	Гн	$L = (n^2\Phi)/I$
Локальные 3D-параметры		
Скалярные магнитные потенциалы, ϕ_{redH_j} , ϕ_{redH_j} , ϕ_{redT_0}	А/м	
Напряженность магнитного поля, \vec{H}	А/м	$\vec{H} = -grad(\phi_{redH_j}) + \vec{H}_j$, $\vec{H} = -grad(\phi_{redT_0}) + \vec{T}_0$
Плотность магнитного потока, \vec{B}	Тл	$\vec{B} = [\mu]\vec{H}$
Магнитное поле источников, не покрываемых сеткой, H_j	А/м	Аналитическое или полуаналитическое вычисление с использованием закона Био-Савара-Лапласа
Остаточная плотность магнитного потока постоянных магнитов, \vec{B}_r	Тл	
Козерцивная сила постоянных магнитов, \vec{H}_c	А/м	
Проницаемость, μ	Гн/м	
Относительная проницаемость, μ_r		
Плотность поверхностной силы между материалами, $d\vec{F}_s$	Н/м ²	Вычисление на границах сред с различной магнитной проницаемостью
Плотность источника тока J_s в сетчатых обмотках	А/м ²	Верификация данных
Плотность лапласовой силы $d\vec{F}_L$ в сетчатых обмотках	Н/м ³	$d\vec{F}_L = \vec{j}_s \times \vec{B}$
Объемная плотность магнитной энергии, dW_m	Дж/м ³	$dW_m = \int_V \vec{H} d\vec{B}$
Глобальные 3D-параметры		
Магнитная сила, \vec{F}_m (Force)	Н	$\vec{F}_m = \partial W_m / \partial l$
Магнитный крутящий момент, \vec{T}_m (Torque)	Н/м	$\vec{T}_m = \partial W_m / \partial \theta$
Магнитная энергия, W_m	Дж	$W_m = \int_V dW_m dV$
Магнитный поток через обмотку-проводник (stranded-типа), Φ_B	Вб	

Граничные условия задаются в большинстве случаев методом бесконечного бокса: программой автоматически назначается условие граничного нулевого магнитного потенциала. Альтернатива — задание нематериальных областей пользователем и определение направления поля на границах как нормального или тангенциального (по умолчанию поле назначается тангенциальным к границе). Если в модели присутствуют симметрии и периодичности, пользователь также определяет направление поля как тангенциальное или нормальное по отношению к плоскостям симметрии, циклические или антициклические условия по отношению к плоскостям периодичности, определенным в геометрическом контексте.

Объемы, поверхности, линии материальных областей позволяют моделировать во Flux материальные среды — воздушные ($\mu_r = 1$), магнитные (магнитомягкие и магнитотвердые — μ_r) непроводящие, проводящие немагнитные ($\mu_r = 1$). Для моделирования доступны тонкие области и филиформы (области с малым поперечным сечением: когда два размера значительно меньше третьего, магнитное поле является тангенциальным к линии моделирования филиформы).

Постоянные магниты как источники поля описываются посредством назначения областей магнитных материалов. При определении материала вводятся характеристики магнита, остаточная индукция, указывается направление намагниченности. Электрические

токи как источники в магнитоэлектродинамическом применении считаются непрерывными, независимыми от времени, с однородно распределенной плотностью тока в поперечном сечении проводника. Электрические источники описываются либо посредством областей материала типа coil conductor, либо посредством entities coils. Дополнительной возможностью является задание наложенного поля как создаваемого магнитным диполем или известным магнитным полем — однородным или пространственно распределенным.

Практическое магнитоэлектродинамическое моделирование во Flux на примере датчика ферромагнитного зубчатого ротора было показано в публикациях [2–7], к которым (а также к технической документации Cedrat) рекомендуем обращаться за выяснением деталей задания свойств материалов, указания на направления осуществления постобработки результатов и т. п.

В случае замкнутой магнитной системы с высокой магнитной проницаемостью возникает также задача соединения различных магнитных областей, если интеграл в выражении (11) не равен нулю. Решением является искусственное моделирование зазора посредством единичного объекта Magnetic Cut, но в том случае, если замкнутая система расчленена плоскостью симметрии и периодичности, введение зазора не требуется.

Анализ результатов предполагает постобработку локальных и глобальных параметров, различных для 2D- и 3D-применений (табл. 1).

Моделирование магнитоэлектродинамических процессов

Магнитные процессы, достигшие установившегося гармонического состояния, характеризуются одной и той же частотой, но синусоидальным изменением во времени всех физических параметров в уравнениях Максвелла.

Для изучения магнитных процессов, находящихся в установившемся гармоническом состоянии с постоянной частотой во Flux существует применение Steady State AC Magnetic. Магнитное поле в этом применении анализируется вместе с вихревыми токами, введенными в проводящих областях.

Учитываются скин-эффект и эффект близости. Скин-эффект состоит в том, что электрические переменные токи неоднородно распределяются в поперечном сечении проводника — с преобладанием концентрации токовых линий в прилегающей к внешней стороне поверхности проводника, и этот эффект становится более значительным по мере того, как частота f тока увеличивается. Также скин-эффект становится более заметным с высокой магнитной проницаемостью μ материала и электрической проводимостью σ .

Параметры, ассоциируемые с электромагнитным полем, уменьшаются по мере увеличения глубины z проводника по экспоненциальному закону:

$$U(z) = U_s \times e^{-z/\delta}, \quad (35)$$

где U_s — значение на поверхности; $\omega = 2\pi f$ — круговая частота; глубина скин-эффекта:

$$\delta = \sqrt{2/(\omega\mu\sigma)}. \quad (36)$$

Эффект близости относится к явлению, которое возникает в системе из нескольких токонесущих проводников, когда магнитное поле, сгенерированное проводником, разрушает токовое распределение в других проводниках.

Результаты магнитоэлектродинамического моделирования — те же, что и для магнитоэлектродинамического приложения, плюс расчет параметров вихревых токов и потерь мощности вследствие эффекта Джоуля. Все вычисленные для данной частоты параметры — синусоидальные.

В контексте Steady State AC Magnetic все параметры выражаются посредством их комплексных изображений. Такое представление действительно при соблюдении следующих гипотез:

- все материалы линейные;
- все источники синусоидальные.

Тем не менее, представление комплексных изображений может быть расширено для двух случаев:

- для нелинейных материалов — параметры являются несинусоидальными, но предусмотрена возможность задания так называемой эквивалентной $B(H)$ -характеристики, допускающей принимать в расчет факт синусоидальности параметров;
- для линейных материалов, но несинусоидальных источников может применяться разложение в ряд Фурье — для получения суперпозиции нескольких гармонических задач (также этот метод применим и для нелинейных материалов).

Важной особенностью приложения является отсутствие в моделях магнитов. Вихревые токи наводятся и в пассивных, и в активных (питаемых внешней схемой) проводниках. Возможно объединение с внешней схемой.

Уравнения и условия вычислений следующие. В вычисления включаются уравнения Максвелла для магнитной системы (3), а соотношения материалов, которые принимаются в расчет, имеют вид (4).

Вычисляются B -, H -, E -поля. D -поле не вычисляется. Переменные состояния зависят от времени (то есть $d/dt \neq 0$).

Для решения используются две модели:

- векторная, с вычислением переменной состояния магнитного векторного потенциала \vec{A} ;
- скалярная, с вычислением магнитного скалярного потенциала, записываемого как ϕ_{tot} или ϕ_{res} .

Уравнение Максвелла-Фарадея допускает присутствие электрического скалярного потенциала ϕ :

$$\vec{E} = -(\partial\vec{A}/\partial t) - \text{grad}\phi. \quad (37)$$

Уравнение для переходных процессов, решаемое в применении Transient Magnetic, записывается как

$$\text{rot}(v_0[v_r]\text{rot}(\vec{A})) + [\sigma](\partial\vec{A}/\partial t + \text{grad}\phi) = 0. \quad (38)$$

Комплексное изображение этого уравнения, в котором $d/dt = j\omega$, имеет следующий вид:

$$\text{rot}(v_0[v_r]\text{rot}(\vec{A})) + [\sigma](j\omega\vec{A} + \text{grad}\phi) = 0. \quad (39)$$

Переменные состояния включают:

- магнитный векторный комплексный потенциал \vec{A} (A_n для плоских задач и rA_n для осесимметричных);
- электрический скалярный потенциал.

Flux 3D для скалярной модели Steady State AC Magnetic использует также различные автоматические формулировки с различными скалярными потенциалами — те же, что рассматривались ранее в описании магнитоэлектродинамических приложений.

Описание задачи в Steady State AC Magnetic включает определение частоты (при выборе применения). Для изучения низкочастотных проблем уравнения электрических полей E и D и магнитных полей B и H также могут быть разъединены. Это разделение зависит от частоты, материалов, размера домена исследования. Обычно разделение действительно от 0 до 10 ГГц.

О моделировании скин-эффекта необходимо сказать еще несколько слов.

Если материал характеризуется линейными, гомогенными и изотропными свойствами, среднее значение глубины скин-эффекта можно вычислять согласно формуле (36).

Физические параметры электрического тока или магнитного поля экспоненциально уменьшаются при увеличении глубины скин-эффекта, если область материала плоская. Для того чтобы точно оценить физические параметры в скин-регионе, по крайней мере два слоя элементов (второго порядка) в толщине необходимы. Некоторые проблемы возникают, когда глубина $\delta \ll L$ или $\delta \gg W$ — длины или ширины материала. Но во Flux существует возможность задания областей материала с поверхностным импедансом.

Гипотеза основывается на существовании нулевого вектора электрического поля в проводнике \vec{E} — за исключением поверхности проводящего региона, где присутствует поверхностная плотность тока \vec{j}_s .

Поверхностный импеданс Z_s соотносит тангенциальный компонент магнитного поля с тангенциальным компонентом электрического поля на поверхности проводящего региона с использованием следующего соотношения:

$$\vec{E}_s = Z_s(\vec{n} \wedge \vec{H}_s), \quad \text{с } Z_s = (1+j)/\sigma\delta, \quad (40)$$

где \vec{n} — единичный вектор, направленный нормально к поверхности, исходящий из проводящего региона.

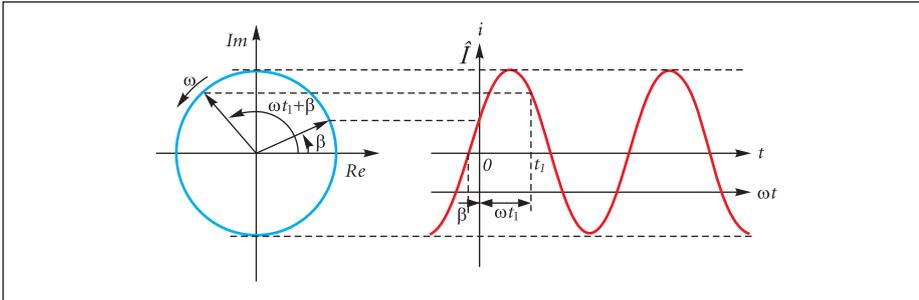


Рис. 3. Синусоидальный ток и его комплексное изображение

Ограничения по определению поверхностного импеданса задаются двумя условиями: $\delta < L/5$ и $\delta < r/5$, где L — толщина, r — радиус кривизны.

Поле должно быть преимущественно тангенциальным (допускаются только незначительные нормальные составляющие). Эти ограничения записываются в виде: $\delta/L > 10(\mu_0/\mu)$ и $\mu > 10\mu_0$.

Проводящий твердотельный регион, описываемый условием поверхностного импеданса (Region of solid conductor type described by surface impedance), представляет собой комбинацию:

- неактивного объемного региона,
- контура региона с поверхностным импедансом.

Неактивный регион можно не покрывать сеткой, поскольку переменные состояния на внутренних узлах не вычисляются.

Flux 3D допускает также возможность моделирования тонких проводящих регионов пассивных проводников, в которых плотность тока моделируется постоянной (2D) или гиперболически распределенной по толщине (3D), а также областей с малым поперечным сечением — филиформ.

Источники в применении Steady State AC Magnetic бывают следующих типов:

- электрический ток (синусоидальный);
- наложенное значение напряженности H_0 магнитного поля (3D-применение) однородное или распределенное, синусоидально изменяющееся во времени;
- наложенное значение плотности Φ_0 магнитного потока (2D-применение), характеризующееся теми же свойствами, что и H_0 .

Параметры постобработки в Steady State AC Magnetic — скалярные или векторные, также синусоидальные.

Синусоидальный скалярный параметр угловой частоты пульсаций (переменного тока) ω может быть геометрически представлен как вектор, вращающийся с угловой скоростью ω (рис. 3) [8]. В комплексном домене вращающийся вектор для данного отрезка времени является представлением комплексного числа. Значение вращающегося вектора для $t = 0$ представляет собой комплексное изображение синусоидально изменяющегося скалярного параметра.

Мгновенное значение синусоидального тока равно изображению комплексного числа $Ie^{j\omega t}$:

$$i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \beta), \quad (41)$$

где $I = \hat{I}e^{j\beta}$ (42) — это так называемое комплексное изображение тока, то есть $i(t) = \text{Imag}(Ie^{j\omega t})$ (43).

Комплексное мгновенное значение синусоидального тока определяется следующим соотношением:

- в декартовой форме:

$$i(t) = \hat{I} \cos(\omega t + \beta) + j\hat{I} \sin(\omega t + \beta); \quad (44)$$

- в экспоненциальной форме:

$$\underline{i}(t) = Ie^{j(\omega t + \beta)}, \quad (45)$$

где I — модуль комплексного значения $\underline{i}(t)$; $(\omega t + \beta)$ — аргумент или фаза комплексного значения $\underline{i}(t)$, β — начальная фаза (для $t = 0$).

Вращающийся вектор, назначенный синусоидальному параметру

$$A(t) = \hat{A} \sin(\omega t + \nu_0), \quad (46)$$

выражается в форме комплексной функции времени $A(t)$. Эта комплексная функция времени может быть записана:

- в декартовой форме:

$$A(t) = \hat{A} \cos(\omega t + \nu_0) + j\hat{A} \sin(\omega t + \nu_0); \quad (47)$$

- в экспоненциальной форме:

$$\underline{A}(t) = \hat{A} e^{j(\omega t + \nu_0)}, \quad (48)$$

где далее она может быть разложена на два фактора:

$$\underline{A}(t) = \hat{A} e^{j(\omega t + \nu_0)} = \hat{A} e^{j\nu_0} e^{j\omega t}, \quad (49)$$

$$\underline{A} = \hat{A} e^{j\nu_0} = \hat{A} \cos(\nu_0) + j\hat{A} \sin(\nu_0), \quad (50)$$

Фазор (phasor) содержит информацию об амплитуде и начальной фазе синусоидально изменяющегося параметра — это и есть комплексное изображение параметра; $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ (51) — информацию о временной вариации параметра.

Синусоидальная функция во временном домене может быть представлена в комплекс-

ном домене с помощью первого фактора — комплексного изображения функции. Фазор (phasor) определяется как вращающийся вектор в момент $t = 0$ в комплексном домене, назначенный параметру $A(t)$.

Постобработка скалярных результатов осуществляется различными путями:

- мгновенная постобработка — для момента времени ωt : значение параметра $A(t)$; значение комплексного вращающегося вектора (модуль/аргумент (фаза) или действительная/мнимая часть);
- не зависящая во времени постобработка (во Flux 2D): фазор или комплексное изображение (модуль/аргумент (фаза) или действительная/мнимая часть).

Векторные параметры раскладываются на компоненты, каждый из которых записывается как синусоидальный параметр:

$$B_X(t) = \hat{B}_X \sin(\omega t + \nu_{0X}), \quad (52)$$

или, в комплексной системе изображения, как вращающийся вектор:

$$\underline{B}_X(t) = \hat{B}_X \times e^{j(\omega t + \nu_{0X})}, \quad \underline{B}_X(t) = \hat{B}_X \times \cos(\omega t + \nu_{0X}) + j\hat{B}_X \times \sin(\omega t + \nu_{0X}), \quad (53)$$

где \hat{B}_X — модуль комплексного компонента \underline{B}_X ; $(\omega t + \nu_{0X})$ — аргумент или фаза \underline{B}_X .

В общем случае векторные параметры описывают эллиптические пути периода в 2D-вычислительном домене (X, Y). Выражения двух компонентов вектора плотности магнитного потока B в точке вычислительного домена записываются как

$$B_X(t) = \hat{B}_X \times \cos(\omega t + \nu_{0X}), \quad B_Y(t) = \hat{B}_Y \times \cos(\omega t + \nu_{0Y}) \quad (54)$$

и представляют собой не что иное, как параметрические уравнения эллипса — эллиптического изменения параметра во времени t (рис. 4) [8].

В зависимости от их эллиптической характеристики два компонента плотности B магнитного потока выражаются как следующее:

$$B_X(t) = \sqrt{(a \times \cos \theta)^2 + (b \times \sin \theta)^2} \times \cos(\omega t + \nu_{0X}), \quad \text{tg}(\nu_{0X}) = (b/a) \text{tg} \theta,$$

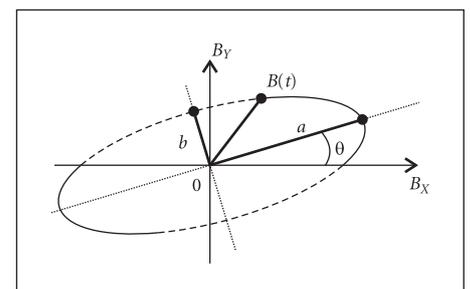


Рис. 4. Эллиптическое представление двух компонентов вектора плотности магнитного потока в 2D-вычислительном домене

$$B_Y(t) = \sqrt{(a \times \sin \theta)^2 + (b \times \cos \theta)^2} \times \cos(\omega t + \nu_{0Y}),$$

$$\operatorname{tg}(\nu_{0Y}) = -(b/a) \operatorname{ctg} \theta. \quad (55)$$

Постобработка векторных результатов возможна в следующих вариантах:

- мгновенная постобработка — для данного момента времени ωt :
 - значение векторного параметра $\vec{B}(t)$;
 - значение комплексного вращающегося вектора $\vec{B}(t)$ (модуль/аргумент (фаза)) или действительная/мнимая часть;
- не зависящая от времени постобработка:
 - электрическое представление (в 2D): эллиптические характеристики (a, b и другие.)

Пульсирующие величины — периодические параметры с ненулевым средним значением — также могут анализироваться с постобработкой.

Мгновенная электрическая мощность как сумма двух компонентов $P(t)$ — абсорбируемая или поставяемая посредством диполя — представляет собой сумму двух компонентов:

- не зависящего во времени:

$$P_m = U \times I \times \cos \varphi; \quad (56)$$

- периодического компонента с двойной частотой:

$$P_p = U \times I \times \cos(2\omega t + \varphi). \quad (57)$$

Мгновенное значение силы на лопастях контактора — это также сумма двух компонентов (компонента, не зависящего от времени F_m , и периодического):

$$F_m \times \cos(2\omega t + \varphi). \quad (58)$$

Для постобработки скалярного параметра, такого как мощность, главный интерес представляет вычисление постоянного компонента (среднего значения). Условие пульсации малоинтересно. Вычисление мгновенного значения мощности $P_m(t)$ не выполняется ни во Flux 2D, ни во Flux 3D. Еще одна возможность для вычислений — временное интегрирование:

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt. \quad (59)$$

Для векторных параметров, таких как сила, представляют интерес именно два компонента — среднее значение и параметр пульсаций. Вычисляются как мгновенные значения, например $F(t)$, так и среднее значение — посредством временной интеграции:

$$\vec{F}_m = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{F}(t) dt, \quad (60)$$

производится постобработка условия пульсации \vec{F}_p : стандартная постобработка, эллиптическое 2D-представление.

Локальные и глобальные параметры, доступные для постобработки/анализа результатов решения задачи в приложении Steady State AC Magnetic Flux, включают представленные в таблице 2.

Таблица 2. Локальные и глобальные параметры постобработки магнетогармонических результатов во Flux 2D/3D

Параметры	Единицы измерения	Объяснение
Локальные комплексные 2D-параметры		
Векторный потенциал: • для плоской задачи — A_z , • для осесимметричной задачи — rA_z	Вб/м Вб	
Напряженность магнитного поля, \vec{H}	А/м	$\vec{H} = \operatorname{rot} A_z$
Плотность магнитного потока, \vec{B}	Тл	$\vec{B} = [\mu] \vec{H}$
Магнитный поток, Φ ($\Phi_{P1,P2}$ — магнитный поток через поверхность, не ограниченную линиями, нормальными к домену исследования, передаваемым посредством точек P1 и P2)	Вб	$\Phi_{P1,P2} = (A_{zP1} - A_{zP2}) \rho$, ρ — толщина домена плоской задачи
Плотность тока источника, J_z	А/мм ²	$\vec{J}_z = \operatorname{rot}(\vec{H})$
Лапласова сила (локальное значение), \vec{F}_L	Н/м ³	$\vec{F}_L = \vec{J} \times \vec{B}$
Локальные средние 2D-параметры		
Объемная плотность активной мощности, dP	Вт/м ³	$dP = (1/2) \rho J_z \times J_z^*$
Другие локальные 2D-параметры		
Проницаемость, μ	Гн/м	
Удельное сопротивление, ρ	Ом/м	
Глобальные комплексные 2D-параметры		
Магнитная сила, \vec{F}_m (Magnetic Pressure)	Н	Интегрирование поверхностных сил (тензорный метод Максвелла)
Магнитный крутящий момент, \vec{T}_m (Torque)	Н/м	
Ток (источника), J_z (Current)	А	$J_z = \int_S J_z dS$
Магнитный поток в области, Φ (Inductance/Flux)	Вб	$\Phi = \int_l A_z dl$
Глобальные действительные 2D-параметры		
Индуктивность, L (Inductance/Inductance)	Гн	$L = (\pi \Phi) / I$
Глобальные средние действительные 2D-параметры		
Магнитная сила, \vec{F}_m	Н	$\vec{F}_m = \partial W_m / \partial l$
Магнитный крутящий момент, \vec{T}_m	Н/м	$\vec{T}_m = \partial W_m / \partial \theta$
Активная мощность, P	Вт	$P = \int_V (dP) dV$
Реактивная мощность, Q	Вар	$Q = \int_V (1/2) (\omega \mu) B^2 dV$
Лапласова сила, $\vec{F}_L = \int_V (\vec{J} \times \vec{B}) dV$: • средний действительный вектор; • пульсирующий компонент.	Н	
Локальные комплексные 3D-параметры		
Скалярные магнитные потенциалы, $\Phi_{\text{ext}}, \Phi_{\text{rad}}, \Phi_{\text{ret}}$	А/м	
Электрический векторный потенциал, \vec{T}	А/м	Непрямой доступ
Напряженность магнитного поля, \vec{H}	А/м	$\vec{H} = -\operatorname{grad}(\Phi_{\text{ext}}), \vec{H} = -\operatorname{grad}(\Phi_{\text{rad}}) + \vec{H}_p, \vec{H} = -\operatorname{grad}(\Phi_{\text{ret}}) + \vec{T}_0$
Плотность магнитного потока, \vec{B}	Тл	$\vec{B} = [\mu] \vec{H}$
Электрическое поле, \vec{E} (в твердотельном проводнике)	В/м	$\vec{E} = ((1/\sigma) \operatorname{rot} \vec{T})$
Магнитное поле источников, не покрываемых сеткой, \vec{H}_p	А/м	Аналитическое или полуаналитическое вычисление с использованием закона Био-Савара-Лапласа
Плотность источника тока в сетчатых обмотках, \vec{J}_S	А/м ²	Верификация данных
Плотность вихревых токов, \vec{J} (в твердотельном проводнике)	А/м ²	$\vec{J} = \operatorname{rot}(\vec{T})$
Другие локальные 3D-параметры		
Проницаемость, μ	Гн/м	
Проводимость, σ	См	
Удельное сопротивление, ρ	Ом/м	
Относительная проницаемость, μ_r		
Средние комплексные локальные 3D-параметры		
Комплексное значение плотности мощности, $dP + jdQ$: • действительное значение, dP ; • мнимое значение, jdQ	Вт/м ³ Вар/м ³	
Средние действительные локальные 3D-параметры		
Плотность потерь вследствие эффекта Джоуля (объемная плотность активной мощности, dP)	Вт/м ³	$dP = (1/2) \vec{E} \times \vec{J}$
Объемная плотность реактивной мощности, dQ	Вар/м ³	$dW_m = \int_0^t \vec{H} d\vec{B}$
Объемная плотность магнитной энергии, dW_m	Дж/м ³	
Локальные параметры 2ω пульсации		
Плотность поверхностной силы между материалами, $d\vec{F}_s$: • среднее значение; • пульсирующий компонент	Н/м ²	Вычисление на границах сред с различной магнитной проницаемостью
Объемная плотность лапласовой силы, $d\vec{F}_L$, в проводниках stranded-типа/сетчатых обмотках: • среднее значение; • пульсирующий компонент	Н/м ³	$d\vec{F}_L = \vec{J}_S \times \vec{B}$
Глобальные 3D-параметры (средние значения)		
Магнитная сила, \vec{F}_m	Н	$\vec{F}_m = \partial W_m / \partial l$
Магнитный крутящий момент, \vec{T}_m	Н/м	$\vec{T}_m = \partial W_m / \partial \theta$
Магнитная энергия, W_m	Дж	$W_m = \int_V dW_m dV$
Комплексное значение магнитного потока через обмотку-проводник (stranded-типа), Φ_k	Вб	$\Phi_k = \partial W_m^* / \partial I_k = \vec{B} \times \vec{h}_{\text{ок}} d\Omega$, где $h_{\text{ок}}$ — поле, созданное обмоткой k в вакууме с током I_k в 1А, Ω — домен исследования

Переходные процессы Transient Magnetic

Модуль Transient Magnetic позволяет пользователю производить магнитные исследования устройств с принятием в расчет переходных магнитных процессов, если это необходимо. Применение Transient Magnetic делает возможным исследование явлений, обусловленных переменным во времени магнитным полем. Переменное магнитное поле создается переменными токами различной формы и постоянными магнитами. Приложение позволяет исследовать наведенные токи, скин-эффект и эффект близости в проводящих областях.

Transient Magnetic допускает схемное и кинематическое объединение.

Объединение с внешней схемой позволяет пользователю принимать в расчет наведенные токи в обмотках типа stranded (многоспиральных) — постоянные наведенные токи в проводниках без скин-эффекта. Кроме того, применение позволяет исследовать угловое движение и вихревые токи в пассивных твердотельных проводниках, в которых токи наводятся, но не проводятся.

В переходной магнитной модели действует гипотеза квазистатического состояния, согласно которой вариациями во времени электрического потока D можно пренебречь.

Принципиальные результаты, достигаемые с этим применением, — те же, что и для магнитостатического применения. А также наведенные токи и рассеиваемая вследствие эффекта Джоуля мощность.

Уравнения, используемые для решения переходных проблем, представляют собой уравнения Максвелла для магнитной системы (3) и конституционные соотношения среды (4) — те же, что и для магнитогармонических процессов.

Условия вычислений следующие:

- переменные состояния зависят от времени $d/dt \neq 0$;
- вычисления производятся для B -, H -, E -полей, D -поле не вычисляется.

Для того чтобы решать эти уравнения, также используются две модели:

- векторная (с магнитным векторным потенциалом A);
- скалярная (с магнитным скалярным потенциалом ϕ_{tot} или ϕ_{red}).

Уравнение, решаемое в векторной модели применения Transient Magnetic методом конечных элементов, записывается в виде (38).

Переменные состояния включают:

- магнитный векторный потенциал \vec{A} ;
 - электрический скалярный потенциал ϕ .
- Применение Transient Magnetic Flux 3D использует автоматические формулировки с различными скалярными потенциалами (в скалярной модели).

Описание задачи во многом сходно с магнитостатическим и магнитогармоническим применением. Определяются границы; гра-

ничные условия либо назначаются автоматически с использованием (в большинстве случаев) метода бесконечного бокса (в бесконечности магнитный потенциал нулевой), либо — без использования метода бесконечного бокса — задаются вручную с указанием нематериальных областей. В отсутствие контурных областей применяются стандартные граничные условия. Магнитное поле является тогда тангенциальным (электрическое — нормальным) к границе.

Если домену исследования назначаются симметрии, пользователь должен указать тип симметрии. Нормальное магнитное и тангенциальное электрическое поля или тангенциальное магнитное и нормальное электрическое поля могут быть наложены на плоскости симметрии, определенные в геометрическом контексте. Если домену исследования назначаются периодичности, пользователь должен указать тип периодичности. Циклические или антициклические условия также могут накладываться на плоскости периодичности, определенные в геометрическом контексте.

Объемы, поверхности и линии материальных регионов допускают в Transient Magnetic моделирование следующих материальных сред:

- воздуха или вакуума ($\mu_r = 1$);
- магнетомягких и магнитотвердых непроводящих материалов ($\mu_r > 1$);
- обмоток, проводящих ток, немагнитных ($\mu_r = 1$);
- твердых проводников (активных или пассивных, магнитных ($\mu_r > 1$) или проводящих (ρ), в которых скин-эффект очевиден), а также тонких областей и филиформ.

Различают проводники обмоток (с токоне-сущим проводником), где скин-эффект пренебрежим вследствие того, что диаметр провода является малым в сравнении с глубиной скин-эффекта, и плотность тока считается однородной, и проводники типа solid conductor, в которых скин-эффект заметен, и плотность тока неоднородна. Кроме того, различают пассивные проводники (питаемые током вследствие закона Фарадея) и активные (непосредственно питаемые током от источника). Активные проводники могут быть открытой (U , E) или замкнутой (не существующей в действительности, но моделируемой во Flux) формы.

Приложение Transient Magnetic отличается от Magneto Static тем, что в нем присутствуют переменные во времени источники тока и анализируются вихревые токи. В магнитостатическом применении электрические токи в проводниках являются непрерывными токами проводимости, распределение токов в проводящей области является однородным — без пространственных вариаций. В Transient Magnetic электрические токи могут быть синусоидальными, трапецеидальными, наведенными. Распределение тока может быть однородным (пренебрежимый скин-эффект, эффект близости отсутствует)

либо неоднородным (скин-эффект/эффект близости).

Различают следующие типы источников поля:

- постоянные магниты;
- токи (с однородным распределением плотности тока) — постоянные или временно-зависимые;
- наложенное электрическое поле (3D).

Привязка электрической схемы осуществляется заданием связей регионов Coil conductor type или Solid conductor type конечно-элементного домена и компонентов Stranded conductor type или Solid conductor type ассоциированной электрической схемы.

Наложное на домен исследования дополнительное поле H_0 может быть однородным или пространственно-распределенным, изменяться во времени. Магнитный поток Φ_0 , наложенный на линейный регион, может также быть однородным или пространственно-распределенным, но не может изменяться во времени.

В случае моделирования проводников с отверстиями (активных или пассивных), например кольцевых, возникает проблема соединения различных потенциалов (рис. 2). Для решения этой проблемы создается математический срез посредством Entity cut of electric loop.

Переходное приложение представляет собой физическое применение, характеризующееся временно-зависимыми свойствами: переменными источниками, переменными характеристиками материалов, дифференциальным temporal-уравнением первого порядка. Численный метод решения представляет собой получение временных разрешений на каждом шаге. Решения независимы друг от друга, каждое из них связано только с предыдущим temporal-уравнением. В общем случае начальные условия предполагают, что переменные состояния сбрасываются к нулю. Во Flux 2D также существует опция инициализации статического вычисления: initialization by static computation.

Анализ результатов решения в переходном приложении сходен с анализом в магнитостатическом и магнитогармоническом приложениях.

В применении Transient Magnetic параметры постобработки являются мгновенными (вычисляются для мгновенного t , соответствующего шагу времени, или представляют собой временную вариацию параметра).

Локальные и глобальные параметры включают представленные в таблицах 1, 3.

Принципы вычисления потерь

Потери мощности в электромеханическом устройстве бывают трех видов:

- магнитные потери в магнитных схемах;
- потери вследствие эффекта Джоуля;
- механические потери (за счет трения и вентилиации).

Таблица 3. Локальные и глобальные параметры постобработки результатов решения в переходном применении во Flux 2D/3D (в дополнение к представленным в табл. 1)

Параметры	Единицы измерения	Объяснение
Локальные 2D-параметры		
Плотность вихревых токов, \vec{j}	А/мм ²	Компонент J_z
Удельное сопротивление, ρ	Ом-м	
Объемная плотность активной мощности, dP	Вт/м ³	$dP = \rho \times j^2$
Глобальные 2D-параметры		
Ток, I (Current) — источника coil и проводника типа Solid Conductor	А	$I = \int_S J_z dS$
Активная мощность, P	Вт	$P = \int_V (dP) dV$
Локальные 3D-параметры		
Электрический векторный потенциал, \vec{T}	А/м	Непрямая доступность
Плотность вихревых токов, \vec{j}	А/м ²	$\vec{j} = \text{rot}(\vec{T})$
Напряженность электрического поля, \vec{E}	В/м	$\vec{E} = (1/\sigma)\vec{j}$
Проводимость, σ	См	
Удельное сопротивление, ρ	Ом-м	
Объемная плотность потерь вследствие эффекта Джоуля, dP	Вт/м ³	$dP = \vec{E} \times \vec{j}$, может также записываться как $dP = \rho \times j^2 = \sigma \times E^2$
Глобальные 3D-параметры		
Рассеянная мощность или потери вследствие эффекта Джоуля в объемной области, P	Вт	$P = \int_V (dP) dV$

Потери мощности в магнитных материалах относятся к явлениям, ассоциируемым с временными вариациями магнитного поля.

Они классически подразделяются на гистерезисные потери — микроскопического происхождения, и потери вследствие токов Фуко — макроскопического.

Гистерезисные потери генерируются посредством временной вариации магнитной микроструктуры вещества, главным образом вследствие движения стен магнитных доменов.

Когда магнитное поле характеризуется циклической временной вариацией, магнитные материалы характеризуются геометрическим местом точек (B, H) , представляющим собой замкнутую кривую. Для сниженных значений частоты ($f < 1$ Гц), замкнутая кривая $B(H)$, называемая статическим гистерезисным циклом, не зависит от частоты. Соответствующие магнитные гистерезисные потери пропорциональны области статического гистерезисного цикла и частоте (квадрату частоты возбуждающего магнитного поля).

Процесс циклического намагничивания определяет трансформацию части электромагнитной энергии в тепловую (магнитотепловые потери). Циклическая вариация магнитного поля во времени определяет токи Фуко в магнитных материалах с электропроводящими свойствами. Потери, связанные с токами Фуко, вызываются эффектом Джоуля вследствие наведенных токов.

При увеличении частоты область замкнутой кривой $B(H)$, называемая динамическим гистерезисным циклом, увеличивается (рис. 5).

В этом случае магнитные потери вследствие циклического намагничивания больше гистерезисных потерь. Потери, соответствующие разнице между областью динамического и статического гистерезисного цикла, обычно называются дополнительными магнитными потерями.

Для магнитных сталей этими потерями можно пренебрегать на частотах до 50 Гц, но на частотах килогерцового диапазона они становятся непренебрежимыми.

Вычисление магнитных потерь и моделирование магнитомягких материалов основывается на следующих принципах:

- гистерезис принимается в расчет на уровне магнитного закона $B(H)$;
- магнитные потери вычисляются непосредственно;
- гистерезисом на уровне $B(H)$ пренебрегают;
- вычисление магнитных потерь выполняется апостериори посредством теоретических и экспериментальных формул.

Моделирование гистерезиса увеличивает время вычислений и требует большего объема памяти. Поэтому во Flux применяется второй подход.

Flux обеспечивает пользователю две модели вычислений магнитных потерь. В обоих случаях вычисление производится апостериори. Гистерезис не моделируется на уровне процесса решения, и $B(H)$ -характеристика представляет собой однозначное соотношение.

Вычисление мощности, соответствующей магнитным потерям, производится в соответствии со следующим выражением для магнитных потерь в связи с гистерезисом:

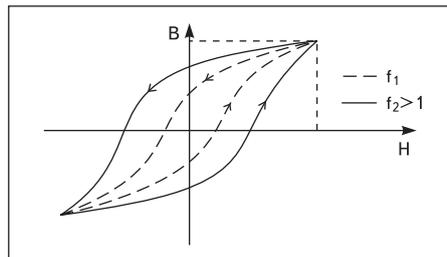


Рис. 5. Магнитные потери и гистерезисный цикл

$$P_h = k_h \times f \times B_{\text{MAX}}^\eta, \quad (61)$$

где η — коэффициент Штейнметца (1,6–2); f — частота; B_{MAX} — пиковое значение плотности потока магнитного поля.

Потери, сгенерированные токами Фуко, вычисляются как

$$P_{ec} = k_{ec} f^2 B_{\text{MAX}}^2. \quad (62)$$

Магнитные потери во Flux вычисляются средствами формул Бертогги. Общие магнитные потери могут быть разделены на следующие три категории:

- потери посредством гистерезиса (P_1), пропорциональные частоте f , которые являются наиболее значительными компонентами магнитных потерь на низкой частоте;
- потери вследствие токов Фуко (P_2), пропорциональные квадрату частоты;
- дополнительные потери (P_3), пропорциональные $f^{3/2}$.

Теория Бертогги дает выражение магнитных потерь как функции частоты и пикового значения плотности магнитного потока:

$$dP = c_1 B_{\text{MAX}}^2 f + c_2 (B_{\text{MAX}} f)^2 + c_3 (B_{\text{MAX}} f)^{3/2}, \quad (63)$$

$$P_1 = c_1 B_{\text{MAX}}^2 f,$$

$$P_2 = c_2 (B_{\text{MAX}} f)^2,$$

$$P_3 = c_3 (B_{\text{MAX}} f)^{3/2},$$

где c_1, c_2, c_3 — соответствующие коэффициенты, B_{MAX} — максимальное значение достижимой индукции.

Коэффициенты c_2 и c_3 выражаются посредством следующих соотношений:

$$c_2 = (\pi^2 \times \sigma \times d^2) / 6, \quad (64)$$

$$c_3 = \sqrt{\sigma \times G \times V_0 \times S}, \quad (65)$$

где d — толщина листа (пластины); G — безразмерная константа; S — поперечное сечение листа (пластины); V_0 — постоянное поле, которое зависит от разницы коэрцитивной силы между двумя магнитными объектами.

В применении Steady State AC Magnetic используется комплексное представление. Объемная плотность средней мощности $dP_{\text{ moy}}$ записывается как

$$dP_{\text{ moy}} = k_h f B_{\text{MAX}}^2 + ((\pi^2 \sigma d^2) / 6) (B_{\text{MAX}} f)^2 + k_e (B_{\text{MAX}} f)^{3/2} \times 8,67, \quad (66)$$

где k_p, k_e — коэффициенты потерь.

В вычислительном фрейме Flux это выражение записывается как

$$dP_{\text{ moy}} = [k_h f B_{\text{MAX}}^2 + ((\pi^2 \sigma d^2) / 6) (B_{\text{MAX}} f)^2 + k_e (B_{\text{MAX}} f)^{3/2} \times 8,67] k_f, \quad (67)$$

где k_f — коэффициент филлинга — заполнения (близкий к единице), или электрической изоляции пластин магнитного сердечника.

Средняя мощность, рассеиваемая в объемном регионе, записывается как

$$P_{\text{ moy}} = \iiint_{\text{рег}} dP_{\text{ moy}} dV. \quad (68)$$

Важно отметить, что B_{MAX} представляет собой пиковую индукцию, и в симуляциях, где вычисленное значение не соответствует пику (ротор и статор моделируются неподвижными, а удельное сопротивление моделируется переменным), вычисления магнитных потерь имеют ограничения. Так же и в том случае, когда нелинейная аппроксимация $B(H)$ и насыщение вводятся средствами эквивалентной модели намагничивания, значения B могут изменяться.

В применении Transient Magnetic изучается переменный режим поля. В зависимости от магнитных потерь объемная плотность мощности будет записываться как

$$dP(t) = k_h f B_{\text{MAX}}^2 + \sigma (d^2/12) ((dB/dt)(t))^2 + k_e ((dB/dt)(t))^{3/2}, \quad (69)$$

в вычислительном фрейме Flux записывается с коэффициентом заполнения:

$$dP(t) = [k_h f B_{\text{MAX}}^2 + \sigma (d^2/12) ((dB/dt)(t))^2 + k_e ((dB/dt)(t))^{3/2}] k_f. \quad (70)$$

Объемная плотность средней мощности за период $dP_{\text{ moy}}$ записывается как

$$dP_{\text{ moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T dP(t) dt, \quad (71)$$

которая далее становится во Flux

$$dP_{\text{ moy}} = k_h f B_{\text{MAX}}^2 k_f + \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sigma \frac{d^2}{12} \left(\frac{dB}{dt}(t) \right)^2 + k_e \left(\frac{dB}{dt}(t) \right)^{3/2} \right] k_f dt. \quad (72)$$

Средняя мощность, рассеиваемая в объемном регионе, записывается в соответствии с (68).

Вычисление магнитных потерь во Flux также производится с помощью модели LS (Loss Surface). Эта модель представляет собой метод оценки магнитных потерь апостериори и основана на модели динамического гистерезиса, ассоциируемого с конечно-элементной симуляцией. В соответствии с LS-моделью магнитное поведение материала определяется экспериментально — посредством характеристической поверхности $H(B, dB/dt)$.

Таким образом, от сигнала $B(t)$ конечной формы и частоты можно через поверхность $H(B, dB/dt)$ прийти к полю $H(t)$, что позволяет реконструировать динамический цикл гистерезиса.

Аналитическая модель позволяет восстановление сигнала $H(t)$ напряженности магнитного поля с начальными данными сигнала $B(t)$ плотности магнитного потока:

$$H(B, dB/dt) = H_{\text{static}}(B) + H_{\text{dynamic}}(B, dB/dt). \quad (73)$$

Кривая $B(H)$, которая может быть получена, позволяет осуществлять точные вычисления железных потерь. Можно также отметить, что LS-модель выполняется во Flux не для всех материалов. ■

Продолжение следует.

Литература

1. Сысоева С. Развитие концепции математического и расчетного моделирования автомобильных датчиков скорости/положения // Компоненты и технологии. 2007. № 12.

2. Сысоева С. Геометрическая и физическая параметризация в конечно-элементном пакете Flux v.10.1.2 Cedrat как подход к оптимизации датчиков скорости/положения // Компоненты и технологии. 2008. № 4.
3. Сысоева С. Геометрическая и физическая параметризация в конечно-элементном пакете Flux v.10.1.2 Cedrat как подход к оптимизации датчиков скорости/положения // Компоненты и технологии. 2008. № 5.
4. Сысоева С. Практический курс моделирования магнитоуправляемых датчиков положения и скорости на базе конечно-элементного программного пакета Flux. Часть 1. Введение в рабочую среду Flux // Современная электроника. 2008. № 5.
5. Сысоева С. Практический курс моделирования магнитоуправляемых датчиков положения и скорости на базе конечно-элементного программного пакета Flux. Часть 2. Магнитостатическое моделирование компонентов рабочей зоны датчика // Современная электроника. 2008. № 7.
6. Сысоева С. Практический курс моделирования магнитоуправляемых датчиков положения и скорости на базе конечно-элементного программного пакета Flux. Часть 2. Магнитостатическое моделирование компонентов рабочей зоны датчика (продолжение) // Современная электроника. 2008. № 8.
7. Сысоева С. Практический курс моделирования магнитоуправляемых датчиков положения и скорости на базе конечно-элементного программного пакета Flux. Часть 2. Магнитостатическое моделирование компонентов рабочей зоны датчика (продолжение) // Современная электроника. 2008. № 9.
8. Техническая документация фирмы Cedrat. Flux 10 User's Guide. Vol.3. Physical applications: Magnetic, Electric, Thermal. Aug 2007.
9. Техническая документация фирмы Cedrat. Flux 9.1 3D application. User's Guide. Vol.5. Physical applications (complements for advanced users). March 2005.