Теорема отсчетов для цифровой обработки случайных сигналов

Геннадий ХУДЯКОВ,
д. т. н., профессор

В настоящее время все радиоэлектронные системы, включая системы телефонии, радиовещания и телевидения, переходят на цифровой режим работы. Поэтому преобразование различных аналоговых сигналов для их обработки в цифровой форме (проблема дискретизации) требует фундаментального математического обоснования для всевозможных классов детерминированных и случайных сигналов с тем, чтобы разработчики таких систем могли уверенно пользоваться цифровыми сигналами и их преобразованиями в различных радиоэлектронных устройствах и компонентах.

Дискретизация детерминированных сигналов с ограниченной энергией в соответствии с теоремой Котельникова-Шеннона получила в 1960-х годах твердую теоретическую базу, а также многочисленные обобщения на основе математической теории гильбертовых пространств с воспроизводящими ядрами [1]. Однако дискретизация случайных сигналов, например, речевых и телевизионных, до сих пор не нашла удовлетворительного для прикладных целей математического обоснования, что приводит на практике к неправомерному применению теоремы отсчетов и некорректным ее интерпретациям при цифровой обработке сигналов.

Теорема отсчетов Котельникова-Шеннона и ее обобщения

Прикладная проблема дискретизации сигналов [2] развивалась значительно позднее, чем математическая проблема интерполяции функций. В результате решения последней получены интерполяционные формулы Ньютона, Стирлинга, Лагранжа, Гаусса, Бесселя, Эверетта, Стеффенсена и др.

О. Коши в 1841 г. [3] и Э. Борель в 1897 г. [4] рассматривали интерполяционные ряды вида:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nh)\,\frac{\sin(\pi(t-nh)/h)}{\pi(t-nh)/h}. \qquad (1)$$

Однако первым, кто осознал важность представления (1) для прикладной математики и провел достаточно подробные исследования свойств ряда (1), был шотландский математик Эдмунд Уиттекер [5]. Он показал [5, 6], что если некоторая неизвестная функция $f(t)$ задана своими эквидистантными отсчетами $f_n = f(a+n\Delta t)$ в бесконечной совокупности точек $(\ldots, a-\Delta t, a, a+\Delta t, \ldots)$, то среди бесконечного множества функций, которые можно провести через совокупность отсчетов $(\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots)$, существует функция, не имеющая разрывов второго рода (сингулярностей) и быстрых осцилляций между отсчетными точками. Такую функцию $C(t)$ Уиттекер назвал основной, или кардинальной функцией (cardinal function):

$$C(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a+n\Delta t)\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t-a-n\Delta t)\right)}{\frac{\pi}{\Delta t}(t-a-n\Delta t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t-a-n\Delta t)\right), \qquad (2)$$

где $\operatorname{sinc} x = (\sin x)/x$.

Например, если $a = 0$ и $f_n = (-1)^n$, то (см. рисунок):

$$C(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t-n\Delta t)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{\Delta t}t\right). \qquad (3)$$

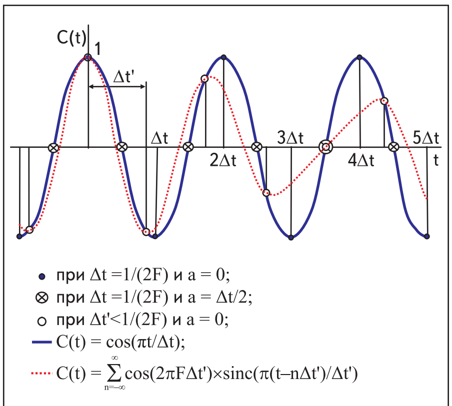

Рисунок. Совокупности эквидистантных отсчетов $\{f_n = f(a+n\Delta t)\}_{-\infty}^{\infty}$ сигнала $f(t) = \cos(2\pi F t)$ и кардинальные функции $C(t)$ для этих совокупностей

При этом формулу (3) нельзя рассматривать как применение теоремы отсчетов Котельникова-Шеннона к функции $\cos(2\pi Ft)$ при $F = 1/(2\Delta t)$, поскольку при $a = \Delta t/2$: $f_n = \cos[\pi(a+n\Delta t)/\Delta t] = \cos[\pi(n+1/2)] = 0$ для любого значения n, и ряд (2) тождественно равен нулю.

Дальнейшие свойства кардинальных функций исследовал в 1925–1927 гг. ученик Уиттекера — У. Феррер [6]. Он обнаружил у кардинальных функций замечательное свойство «самосогласованности» (соответствующий термин “consistency” в [7] взят в кавычки и требует неформального перевода на русский язык).

Теорема 1 (Феррер: 1927 г. [6, 7])

Если $\sum_{n=1}^{\infty}(|f_n|+|f_{-n}|)/n<\infty$, то

$$C(t)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} C(a'+l\Delta t')\times \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t'}(t-a'-l\Delta t')\right), \qquad (4)$$

где $\Delta t' \le \Delta t$, a' — произвольное число. То есть для самосогласованности (иначе говоря — однозначной определенности) кардинальной функции $C(t)$ достаточно, чтобы отсчеты $\{f_n\}_{-\infty}^{\infty}$ соответствующим образом убывали на бесконечности.

Однако из расходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|f_n|+|f_{-n}|)/n$$

не следует отсутствие самосогласованности кардинальной функции $C(t)$, соответствующей ряду $(\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots)$. Тем не менее, разложение (3) для функции $\cos(\pi t/\Delta t)$ свойством однозначной определенности (самосогласованности) не обладает, то есть

$$\cos(\pi t/\Delta t) \neq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi F(a'+n\Delta t'))\times$$
$$\times \operatorname{sinc}\Big(\frac{\pi}{\Delta t'}(t-a'-n\Delta t')\Big). \qquad (5)$$

Как видим, кардинальные функции $C(t)$ имеют к проблеме дискретизации самое непосредственное отношение.

Развитие телеграфной техники в 1900-х годах привело к необходимости оценить теоретически предельно достижимую скорость передачи элементарных посылок через канал связи, рассматриваемый как линейный фильтр нижних частот с частотой среза $F_н$. Первым, кто успешно решил эту задачу (в 1928 г.), был американский электроинженер шведского происхождения Гарри Найквист [6]. Он доказал, что интервал между соседними элементарными телеграфными посылками $\Delta t_т$ не может быть меньше, чем величина $1/(2F_н)$: $\Delta t_т \geq 1/(2F_н)$. По предложению Шеннона [8] предельное значение интервала дискретизации $\Delta t_н = 1/(2F_m)$, где F_m — максимальное значение частоты финитного спектра $\dot{S}(\omega)$ детерминированного сигнала $s(t)$ с ограниченной энергией, названо интервалом Найквиста, хотя сам Найквист проблемой дискретизации не занимался [6].

В 1932 г. советский радиоинженер (будущий академик) В. А. Котельников впервые достаточно четко сформулировал и доказал теорему отсчетов для детерминированных сигналов, а в 1940 г. ее «переоткрыл» американский радиоинженер и математик Клод Шеннон [6]. Современная формулировка теоремы Котельникова-Шеннона заключается в следующем [6].

Теорема 2
(Котельникова-Шеннона)

Пусть сигнал $s(t)$ с конечной энергией $E_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt$ обладает ограниченным по частоте (финитным) спектром:

$$\left|\dot{S}(\omega)\right| = 0 \text{ при } |\omega| > 2\pi F_m.$$

Тогда сигнал $s(t)$ может быть однозначно представлен в виде ряда Э. Уиттекера:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n \operatorname{sinc}(\pi F_д(t-t_n)) =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(a+n\Delta t)\operatorname{sinc}\Big(\frac{\pi}{\Delta t}(t-a-n\Delta t)\Big), \qquad (6)$$

где $s_n = s(a+n\Delta t)$ — отсчет функции $s(t)$ в точке $t_n = a+n\Delta t$; a — произвольное действительное число; $\Delta t = 1/F_д$ — интервал дискретизации ($F_д \geq 2F_m$).

Функция $\operatorname{sinc} x = (\sin x)/x$ в теории сигналов называется функцией отсчетов, а ряд (6) в каждой точке t сходится среднеквадратически. При этом:

$$E_s = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_m}^{\Omega_m} \left|\dot{S}(\omega)\right|^2 d\omega = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n^2,$$

где $\Omega_m \equiv 2\pi F_m$, $\Delta t \leq 1/(2F_m)$.

Поскольку величину $\Delta t_н = 1/(2F_m)$ назвали интервалом Найквиста, то в теореме 2 интервал дискретизации Δt должен удовлетворять неравенству $\Delta t \leq \Delta t_н$.

Шеннон в фундаментальной статье [8] приводит пример «белого шума» с финитной спектральной плотностью мощности ($W_\xi(\omega) = N_0 \leq 2\pi F_m$), имеющего в качестве своих реализаций функции вида:

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \operatorname{sinc}\Big(\frac{\pi}{\Delta t}(t-n\Delta t)\Big),$$

где случайные коэффициенты a_n распределены по закону Гаусса и независимо друг от друга со средним $\overline{a}_n = 0$ и с дисперсией $\sigma_n^2 = N_0$. Однако обобщения теоремы отсчетов на случайные процессы $\xi(t)$ Шеннон не приводит.

Обобщения теоремы отсчетов на случайные процессы предпринимались в 1957 г. А. Балакришнаном [9], в 1959 г. С. Ллойдом [3] и в 1968 г. Л. Кэмпбеллом [10]. В 1971 г. Дж. Стиффлер [11] предложил довольно оригинальный подход к доказательству теоремы отсчетов для стационарных случайных процессов на «инженерном уровне строгости».

Балакришнан формулирует теорему отсчетов для реализаций действительных или комплексных стационарных (в широком смысле) случайных процессов $\xi(t)$, спектральная плотность мощности $W_\xi(\omega) = W_\xi(2\pi f)$ которых равна нулю вне закрытого интервала частот $[-F_m \leq f \leq F_m]$. При доказательстве он использует формально-математическое разложение:

$$\exp(2\pi \boldsymbol{j} f t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(n\pi \boldsymbol{j} f/F_m)\times$$
$$\times \operatorname{sinc}(\pi(2F_m t-n)) \qquad (7)$$

для каждого значения частоты f внутри открытого интервала $(-F_m < f < F_m)$.

Но при $f = F_m$ правая часть выражения (7) равна:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(n\pi \boldsymbol{j} f/F_m)\operatorname{sinc}(\pi(2F_m t-n)) =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\cos(n\pi) + \boldsymbol{j}\sin(n\pi))\times$$
$$\times \operatorname{sinc}(\pi(2F_m t-n)) =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sinc}(\pi(2F_m t-n)) + \boldsymbol{j}\times 0 =$$
$$= \cos(2\pi F_m t), \qquad (8)$$

что не равно левой части: $\exp(2\pi \boldsymbol{j} F_m t)$. То есть разложение (7) в случае $f = F_m$ не справедливо. Открытость интервала $(-F_m < f < F_m)$ не спасает положения, поскольку ни функция $\cos(2\pi \boldsymbol{j} f t)$, ни $\sin(2\pi \boldsymbol{j} f t)$ свойством однозначной определенности (самосогласованности) не обладает.

Ллойд и Кэмпбелл также исходят из разложения (7). Аналогичное доказательство теоремы отсчетов для стационарных процессов приводится в Справочной математической библиотеке 1967 г. [12].

Стиффлер так же, как и авторы работ [3, 9, 10], не исключил из рассмотрения сингулярные стационарные случайные процессы $\eta(t)$, корреляционная функция которых, например, равна $R_\eta(\tau) = D\cos(2\pi F\tau)$, а реализации гауссовского процесса $\eta(t)$ имеют вид:

$$\eta(t) = \alpha\cos(2\pi Ft)+\beta\sin(2\pi Ft) =$$
$$= \gamma\cos(2\pi Ft+\varphi),$$

где α и β — реализации гауссовских случайных величин α и β с параметрами $\overline{\alpha} = \overline{\beta} = 0$; $\overline{\alpha^2} = \overline{\beta^2} = D$; $\overline{\alpha\beta} = 0$; γ и φ — реализации случайной амплитуды γ и начальной фазы φ, которые распределены независимо друг от друга: γ — по закону Релея, φ — равномерно на промежутке $(0, 2\pi]$.

Формальный ряд Уиттекера для произвольной реализации стационарного процесса $\eta(t)$ при $a = 0$ и $\Delta t = 1/(2F)$ имеет вид:

$$\varsigma(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\Big(\frac{\pi}{\Delta t}(t-n\Delta t)\Big)\times$$
$$\times[\alpha\cos(n\pi)+\beta\sin(n\pi)] =$$
$$= \alpha\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\Big(\frac{\pi}{\Delta t}(t-n\Delta t)\Big)\times\cos(n\pi) =$$
$$= \alpha\cos(2\pi Ft).$$

Как видим, здесь $\varsigma(t) \neq \eta(t)$, а процесс $\varsigma(t) = \{\varsigma_i(t)\}_1^\infty$ даже не является стационарным, поскольку

$$R_\varsigma(t, s) = \overline{\alpha^2}\times\cos(2\pi Ft)\cos(2\pi Fs) =$$
$$= 0{,}5D\times[\cos(\pi(t-s)/\Delta t)+\cos(\pi(t+s)/\Delta t)].$$

Если $\Delta t' < 1/(2F)$, то реализации $\varsigma_i(t)$ будут представлять собой некоторые «биения» с частотой $[1/\Delta t' - 1/(2F)]$ и не будут совпадать с исходными реализациями (рисунок), то есть ряд (2) для реализаций процесса $\eta(t)$ однозначно не определен.

Предварительные итоги развития проблемы дискретизации подведены в обширном обзоре 1977 г. А. Джерри [13]. Вместе с тем, из обзора Э. Майеринга 2002 г. [4] видно, что должного математического фундамента теорема отсчетов для случайных процессов так и не получила, а дискуссии, ведущиеся в Интернете по настоящее время [14], говорят о том, что отсутствие такого фундамента приводит к неверным интерпретациям и незаконным применениям теоремы отсчетов при цифровой обработке аналоговых сигналов.

Основные ограничения применимости теоремы отсчетов к стационарным случайным процессам

Известно [15], что всякий стационарный случайный процесс $\zeta(t)$ может быть представлен, и притом единственным образом, суммой (разложение Вольда): $\zeta(t) = \eta(t)+\xi(t)$, где $\eta(t)$ — сингулярный случайный процесс, $\xi(t)$ — регулярный случайный процесс;

при этом процессы $\eta(t)$ и $\xi(t)$ не коррелированы между собой (в случае гауссовского процесса $\zeta(t)$ — и независимы).

Обобщенная спектральная плотность средней мощности $W_\eta(\omega)$ сингулярного процесса $\eta(t)$ имеет вид:

$$W_\eta(\omega) = \sum_{k=1}^{N} \Delta_k \delta(\omega - \omega_k),$$

где $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k, \ldots, \omega_N\}$ — (линейчатый) спектр процесса $\eta(t)$, а его реализации представляют собой почти периодические функции (Бора). Как показано выше, такие процессы не могут быть однозначно представлены в виде ряда (2).

Регулярные стационарные процессы $\xi(t)$ имеют кусочно-непрерывную спектральную плотность мощности $W_\xi(\omega)$ и являются реакциями некоторого стационарного линейного (не обязательно физически реализуемого!) фильтра с коэффициентом передачи $\dot{K}(\omega)$ на «белый шум», то есть на стационарный случайный процесс с корреляционной функцией вида $R_{\text{б.ш}}(\tau) = N_0\,\delta(\tau)$, где $W_{\text{б.ш}}(\omega) = N_0$ — спектральная плотность мощности «белого шума».

Это следует из того, что функция $W_\xi(\omega)$ — не отрицательная, а действие фильтра с коэффициентом передачи $\dot{K}(\omega)$ на спектральную плотность мощности $W_{\text{вх}}(\omega)$ входного случайного процесса имеет вид $W_{\text{вых}}(\omega) = W_{\text{вх}}(\omega)|\dot{K}(\omega)|^2$. Отсюда $W_\xi(\omega) = N_0|\dot{K}(\omega)|^2$, где $\dot{K}(\omega)$ — амплитудно-частотная характеристика формирующего данный регулярный случайный процесс $\xi(t)$ фильтра.

Если мощность P_ξ процесса $\xi(t)$ не ограничена, то есть если

$$P_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(\omega)\, d\omega = \infty,$$

то его дисперсия

$$D_\xi = \overline{\xi^2(t)} = R_\xi(0) = P_\xi = \int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(\omega) d\omega = \infty,$$

и процесс $\xi(t)$ не может быть представлен рядом Уиттекера (2), поскольку отсчеты $\xi_n = \xi(a+n\Delta t)$ в этом случае не будут определены (будут иметь «бесконечные значения»).

Если $P_\xi < \infty$, то процесс $\xi(t)$ может быть представлен совокупностью реализаций $\{\xi_i(t)\}_1^\infty$, которые являются гармониками вида $\xi(t) = \alpha\cos(\omega t + \varphi)$, где α, φ, ω — независимые случайные величины; при этом величина α распределена по закону Релея со среднеквадратическим значением $s_\alpha = 1$, φ — равномерно на промежутке $(-\pi, \pi]$, ω — с плотностью вероятности $p(\omega) = W_\xi(\omega)/P_\xi$. Реализации таких не эргодических процессов, так же как и сингулярных процессов $\eta(t)$, не могут быть представлены в виде ряда (2).

Таким образом, мы исключили из множества стационарных случайных процессов $\{\zeta(t)\}$ те подмножества, реализации которых не могут быть однозначно представлены рядами Уиттекера (2) со случайными коэффициентами, поскольку не обладают свойством самосогласованности Феррера (4): сингулярные стационарные процессы, стационарные процессы с бесконечной мощностью и не эргодические процессы.

Теорема отсчетов для гауссовских стационарных случайных сигналов

Для определенности мы ограничимся рассмотрением множества стационарных случайных сигналов $\{\xi(t)\}$, мгновенные значения которых $\xi = \xi(t)$ распределены по закону Гаусса. Обобщение на негауссовские случайные сигналы принципиальных затруднений представлять не должно, а гауссовские сигналы для радиоэлектроники представляют наибольший практический интерес. Кроме того, будем полагать, что среднее значение $\overline{\xi(t)} = 0$, где черта сверху является символом усреднения по ансамблю реализаций $\{\xi_i(t)\}_1^\infty$ случайного сигнала $\xi(t)$. Формулировка и предварительное доказательство теоремы отсчетов для гауссовских стационарных случайных сигналов были представлены автором в 2007 г. в [16].

Теорема 3

Если стационарный регулярный гауссовский случайный сигнал $\xi(t)$ с ограниченной мощностью ($P_\xi = \overline{\xi^2(t)} < \infty$) является эргодическим и имеет финитную спектральную плотность средней мощности (энергетический спектр) $W_\xi(\omega) = 0$ при $|\omega| > 2\pi F_m$, то его реализации могут быть однозначно представлены в виде:

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi(a+n\Delta t)\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{\Delta t}(t-a-n\Delta t)\Big), \quad (9)$$

а корреляционная функция $R_\xi(\tau)$ такого сигнала $\xi(t)$:

$$R_\xi(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_\xi(m\Delta t)\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{\Delta t}(\tau - m\Delta t)\Big), \quad (10)$$

где a — произвольное число и величина $\Delta t \le 1/(2F_m)$.

Доказательство

Как показано в статье [17], реализации «белого шума» могут быть представлены в форме пуассоновского потока дельта-импульсов с гауссовскими случайными коэффициентами. Следовательно, реализации гауссовского регулярного стационарного случайного процесса $\xi(t)$ можно представить в виде:

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \beta_k\, s(t-t_k), \quad (11)$$

где β_k — независимые гауссовские случайные величины с нулевыми средними $\overline{\beta}_k = 0$ и с одинаковыми дисперсиями $\sigma_k^2 = D_\beta$; $\{t_k\}_{-\infty}^{\infty}$ — пуассоновская совокупность моментов времени t_k с интенсивностью λ; $s(t)$ — формирующий сигнал:

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{W_\xi(\omega)}\exp(\boldsymbol{j}\omega t)d\omega.$$

При этом $\lambda D_\beta = 1$, а мощность P_ξ процесса $\xi(t)$ численно равна величине энергии сигнала $s(t)$: $P_\xi = \lambda D_\beta E_s = E_s$.

Ясно, что представление (11) является эргодическим, поскольку по одной из реализаций (11) процесса $\xi(t)$ может быть определена спектральная плотность формирующего сигнала $s(t)$, а также величины λ и D_β, а значит, и спектральная плотность мощности $W_\xi(\omega) = \lambda D_\beta|\sqrt{W_\xi(\omega)}|^2$.

По теореме Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_\xi(\omega)d\omega = P_\xi < \infty.$$

Значит, формирующий сигнал $s(t)$ имеет ограниченную энергию $E_s = P_\xi$.

Если спектральная плотность мощности $W_\xi(\omega)$ финитна, то:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\exp(-\boldsymbol{j}\omega t)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-2\pi F_m}^{2\pi F_m} \sqrt{W_\xi(\nu)}\exp(\boldsymbol{j}(\nu-\omega)t)d\nu dt =$$

$$= \int_{-2\pi F_m}^{2\pi F_m} \sqrt{W_\xi(\nu)}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(\boldsymbol{j}(\nu-\omega)t)dt\,d\nu =$$

$$= \int_{-2\pi F_m}^{2\pi F_m} \sqrt{W_\xi(\nu)}\,\delta(\nu-\omega)d\nu = \sqrt{W_\xi(\omega)}.$$

То есть формирующий сигнал $s(t)$ также имеет финитный спектр ($\dot{S}(\omega) = 0$ при $|\omega| > 2\pi F_m$), и к сигналу $s(t)$ может быть применена теорема 2:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(a+n\Delta t)\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{\Delta t}(t-a-n\Delta t)\Big). \quad (12)$$

Подставляя разложение (12) в формулу (11), получим:

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(a+n\Delta t)\times$$
$$\times\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{\Delta t}(t-t_k-a-n\Delta t)\Big). \quad (13)$$

Поскольку ряд Уиттекера (12) для функции $s(t)$ обладает свойством самосогласованности, то равенство (13) не нарушится, если при каждом значении k положить $a = b - t_k$. Тогда:

$$\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(b-t_k+n\Delta t)\times$$
$$\times\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{\Delta t}(t-b-n\Delta t)\Big).$$

Поменяем порядок суммирования по k и по n:

$$\xi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{sinc}\Big(\frac{\pi}{\Delta t}(t-b-n\Delta t)\Big)\times$$
$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\beta_k\, s(b-t_k+n\Delta t). \quad (14)$$

Сравнивая выражения (14) и (11), видим, что

$$\xi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi(b+n\Delta t)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t-b-n\Delta t)\right).$$

Для корреляционной функции $R_\xi(\tau)$ получим разложение (15).

Положим $a = t$; тогда (16), поскольку $\mathrm{sinc}(0) = 1$, а при $n \neq 0$ значение $\mathrm{sinc}(n\pi) = 0$.

Теорема доказана.

$$R_\xi(\tau)=\overline{\xi(t)\xi(t+\tau)}=$$

$$=\overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\xi(a+n\Delta t)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t-a-n\Delta t)\right)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\xi(a+k\Delta t)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t+\tau-a-k\Delta t)\right)}=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\overline{\xi(a+k\Delta t)\xi(a+n\Delta t)}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t-a-n\Delta t)\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t+\tau-a-k\Delta t)\right)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_\xi((k-n)\Delta t)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t-a-n\Delta t)\right)\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(t+\tau-a-k\Delta t)\right) \quad (15)$$

$$R_\xi(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_\xi((k-n)\Delta t)\,\mathrm{sinc}(n\pi)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(\tau-k\Delta t)\right)=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}R_\xi(k\Delta t)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta t}(\tau-k\Delta t)\right) \quad (16)$$

Обратим внимание на то, что в разложении (9) для реализаций случайного сигнала $\xi(t)$ величина a — произвольная, а в разложении (10) для корреляционной функции $a = 0$. Кроме того, несмотря на то, что реализации сигнала $\xi(t)$ не удовлетворяют условиям теоремы 1 (Феррера), они допускают однозначно определенное представление (9).

Практический смысл условия эргодичности стационарного случайного сигнала $\xi(t)$ в теореме 3 такой же, как условия принадлежности детерминированного сигнала $s(t)$ пространству $L_2(t)$ в теореме 2: отсутствие в сигнале $s(t)$ или в реализациях сигнала $\xi(t)$ сингулярных составляющих вида $A\cos(\omega t+\varphi)$.

Несмотря на то, что проблема интерполяции функций с помощью ряда (2) была четко сформулирована Э. Уиттекером в 1914 г., а проблема дискретизации для детерминированных сигналов с ограниченной энергией впервые решена в 1932 г. В. А. Котельниковым, полное решение проблемы дискретизации для всевозможных классов аналоговых сигналов далеко от завершения. Это не позволяет радиоинженерам всегда правильно и уверенно использовать «теорему отсчетов» при разработке различных цифровых радиоэлектронных компонентов и применении в них цифровой обработки сигналов различных классов.

Сформулирована и доказана (на уровне строгости прикладной математики) теорема отсчетов для широко используемого в радиоэлектронике класса сигналов: эргодических стационарных случайных с ограниченной мощностью.

Литература

1. Функции с двойной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике. США, 1961–1968 гг. / Пер. и науч. обработка М. К. Размахнина и В. П. Яковлева. М.: Советское радио, 1971.
2. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю. В. Прохоров. М.: Большая Российская Энциклопедия, 1999.
3. Lloyd S. P. A sampling theorem for stationary (wide sense) stochastic processes // Trans. Am. Math. Soc. 1959. V. 92. № 1.
4. Meijering E. Chronology of Interpolation: from Ancient Astronomy to Modern Signal and Image Processing // Proc. IEEE. 2002. V. 90. № 3.
5. Whittaker E. T. On the Function which are Represented by the Expansion of Interpolation-Theory // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1914. V. 35, pt. 2.
6. Худяков Г. И. Теорема отсчетов теории сигналов и ее создатели // Радиотехника и электроника. 2008. Т. 53. № 9.
7. Whittaker J. M. Interpolatory Function Theory. New-York – London: Stechert – Hafner, 1964.
8. Shannon C. A mathematical theory of communication // Bell Syst. Tech. J. 1948. V. 27. № 3, № 4. (Пер.: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностранной литературы, 1963).
9. Balakrishnan A. V. A note on the sampling principle for continuous signals // IRE Trans. 1957. V. IT-3. № 2.
10. Campbell L. L. Sampling theorem for the Fourier transform of a distribution with bounded support // SIAM J. Appl. Math. 1968. V. 16. № 3.
11. Стиффлер Дж. Теория синхронной связи. М.: Связь, 1975.
12. Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А. Теория вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1967.
13. Jerri A. J. The Shannon Sampling Theorem — Its Various Extensions and Applications: A Tutorial Review // Proc. IEEE. 1977. V. 65. № 11.
14. http://en.wikipedia.org/wiki/Nyquist-Shannon_sampling_theorem
15. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Киев: Наукова думка, 1978.
16. Худяков Г. И. Еще раз о теореме отсчетов теории сигналов // Сб. науч. трудов 2 Междунар. конф. «Современные проблемы радиоэлектроники». Ростов-на-Дону: РАС ЮРГУЭС, 2007.
17. Худяков Г. И. Об одном методе математического представления регулярных случайных процессов и полей // Радиотехника и электроника. 1974. Т. 19. № 2.