

Учет скин-эффекта в задачах о потоках самоиндукции и взаимной индукции, наводимых током, протекающим в проводнике с прямоугольным поперечным сечением

Олег БУЛГАКОВ
ombfrier@yandex.ru
Семен ПЕТРОВ
petrovsemen1@mail.ru
Владислав ЛУПАДИН

В статье представлены новые аналитические выражения для расчета магнитных потоков самоиндукции и взаимной индукции в плоских прямоугольных контурах, которые обусловлены протеканием токов в проводниках прямоугольного сечения. Рассмотрен обобщенный случай расположения проводника и контура в параллельных плоскостях при высокочастотном приближении.

Плоскостные (полосковые) системы соединений обеспечивают воспроизводимость электрофизических параметров твердотельных ВЧ и СВЧ усилителей мощности и максимально пригодны для автоматизации процессов сборки. Однако формулы, применяемые для расчетов индуктивностей полосковых и балочных соединений в конструкциях СВЧ-транзисторов [1–3], не отличаются высокой точностью, так как получены с учетом упрощений для некоторых предельных случаев и не учитывают конечные размеры контуров, в которых наводятся потоки самоиндукции и взаимной индукции. В то же время, на частоте свыше 300 МГц индуктивные составляющие импедансов ВЧ и СВЧ-транзисторов оказывают определяющее влияние на их усилительные и частот-

ные свойства. Поэтому повышение точности расчетов малосигнальных параметров транзисторов, связанных с явлениями самоиндукции и взаимной индукции в системах соединений, обеспечивает в конечном итоге повышение достоверности прогнозирования коэффициентов усиления по мощности и оптимальное проектирование согласующих цепей усилительных каскадов.

Рассмотрим проводник в виде тонкой металлической полоски длиной l и шириной w , по которой протекает ток с комплексной амплитудой I , наводящий поток взаимной индукции в плоском прямоугольном контуре площадью h_1 (рис. 1), параллельном плоскости полоски. В общем случае плоскости проводника и контура расположены на расстоянии h_2 одна от другой; h_0 — расстояние между проекцией проводника на плоскость контура и смежным краем контура.

Полоска может быть представлена рядом N параллельных проводников квадратного сечения, а величина магнитного потока в контуре вычисляется как сумма потоков, наводимых каждым проводником:

$$\Phi_{np} = \sum_{i=1}^N \Phi_i; \quad N = \frac{w}{d}, \quad (1)$$

при условии равномерного распределения плотности тока по сечению проводника [4] (2),

где $r_0 = d/2$ — радиус проводника круглого сечения, «вписанного» в проводник квадратного сечения; h_0 — расстояние между смежными краями проводника и контура; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная в СИ;

$$h_i = \sqrt{(h_2 + r_0)^2 + ((2i-1)r_0 + h_1)^2} - r_0;$$

$$h_i = \sqrt{(h_2 + r_0)^2 + ((2i-1)r_0 + h_1 + h)^2} - \sqrt{(h_2 + r_0)^2 + ((2i-1)r_0 + h_1)^2 + r_0}.$$

Произведение третьего и четвертого множителей в левой части (2) представляет собой геометрический индуктивный фактор (ГИФ) F_i прямолинейного проводника круглого сечения по отношению к прямоугольному контуру, расположенному по отношению к проводнику в соответствии с рис. 1. ГИФ проводника ρ_n по отношению к участку площади контура S_k определяется отношением [4]:

$$F(S_k; \rho_n) = \Phi_\xi(S_k; \rho_n)/I_\xi, \quad (3)$$

где $\Phi_\xi(S_k; \rho_n)$ — величина магнитного потока, наведенного в участке площади S_k некоторого замкнутого контура током I_ξ , протекающим по отрезку ρ_n того же или другого замкнутого контура.

Как следует из определения ГИФ, он не зависит от величины тока I_ξ . И при равенстве

$$\Phi_i = I \times \frac{d}{w} \times \frac{\mu_0 \times l}{2\pi} \times \left[\sqrt{1 + \frac{(h_i + h_{i+1} + r_0)^2}{l^2}} - \sqrt{1 + \frac{(h_i + r_0)^2}{l^2}} + \ln \frac{(l + \sqrt{l^2 + (h_i + r_0)^2}) \times (h_i + h_{i+1} + r_0)}{(l + \sqrt{l^2 + (h_i + h_{i+1} + r_0)^2}) \times (h_i + r_0)} - \frac{h_i}{l} \right] = \frac{Id}{w} \times F_i, \quad (2)$$

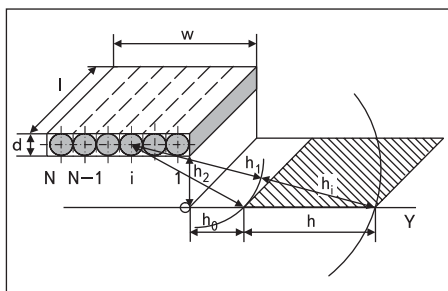


Рис. 1. Расчет потока взаимной индукции от тока, протекающего по тонкой металлизированной полоске

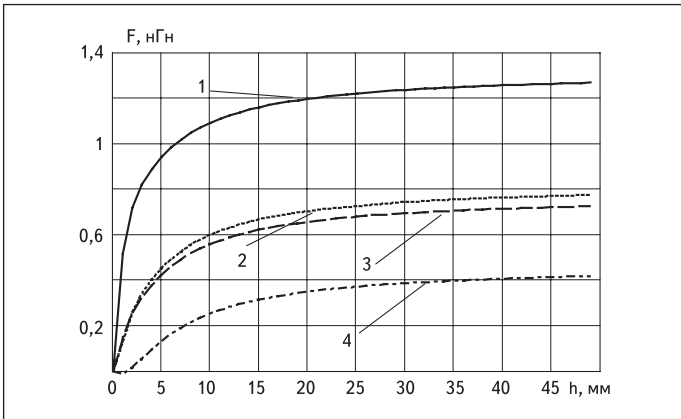


Рис. 2. ГИФ проводников прямоугольного сечения: 1) $h_2 = 0,5$ мм, $h_0 = 0$ мм; 2) $h_2 = 1$ мм, $h_0 = 0$ мм; 3) $h_2 = 1$ мм, $h_0 = 0,5$ мм; 4) $h_2 = 1,5$ мм, $h_0 = 0,5$ мм

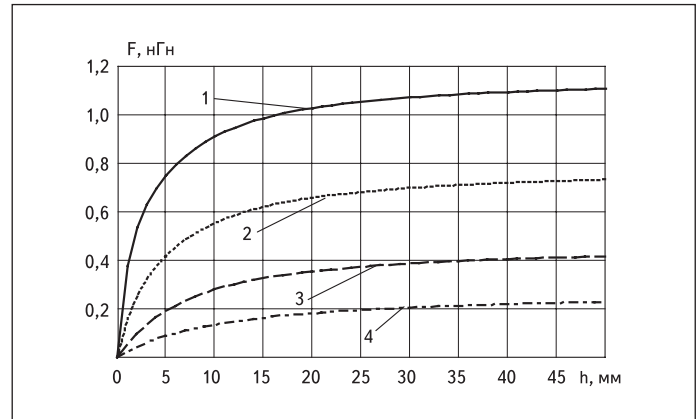


Рис. 3. ГИФ проводников прямоугольного сечения: 1) $h_0 = 0$ мм; 2) $h_0 = 2$ мм; 3) $h_0 = 5$ мм; 4) $h_0 = 10$ мм

$$F_{np} = \frac{\dot{F}_{np}}{I} = \frac{\mu_0 \times l}{2\pi \times w} \int_0^w \left[\sqrt{1 + \frac{(\sqrt{h_2^2 + (y+h_0+h)^2 + r_0)^2}}{l^2}} - \sqrt{1 + \frac{h_2^2 + (y+h_0)^2}{l^2}} + \ln \frac{(l + \sqrt{l^2 + h_2^2 + (y+h_0)^2}) \times (\sqrt{h_2^2 + (y+h_0+h)^2 + r_0})}{(l + \sqrt{l^2 + (\sqrt{h_2^2 + (y+h_0+h)^2 + r_0)^2}) \times (h_2^2 + (y+h_0)^2)} - \frac{\sqrt{h_2^2 + (y+h_0+h)^2} - \sqrt{h_2^2 + (y+h_0)^2}}{l} \right] dy. \quad (4)$$

$$\lambda(p) = \left[\frac{1}{2} (p(\sqrt{l^2 + h_2^2 + p^2} - \sqrt{h_2^2 + p^2}) - l^2 \ln(p + \sqrt{l^2 + h_2^2 + p^2}) + h_2^2 \ln \left(\frac{p + \sqrt{l^2 + h_2^2 + p^2}}{p + \sqrt{h_2^2 + p^2}} \right) + l \left(p \ln \left(\frac{\sqrt{h_2^2 + p^2}}{l + \sqrt{l^2 + h_2^2 + p^2}} \right) + h_2^2 \left(\arctg \left(\frac{p}{h_2} \right) - 2 \arctg \left(\frac{p + l + \sqrt{l^2 + p^2 + h_2^2}}{h_2} \right) \right) \right) \right]. \quad (5)$$

S_k всей площади рассматриваемого контура, а ρ_n — всей совокупности проводников контура, ГИФ имеет физический смысл индуктивности контура L (если $\Phi(S_k; \rho_n)$ — поток самоиндукции) или коэффициента взаимоиנדукции M_{nk} двух контуров. При этом $\Phi(S_k; \rho_n)$ — поток взаимоиנדукции. Таким образом, ГИФ объединяет в себе понятия индуктивности и коэффициента взаимоиנדукции, являясь по отношению к ним обобщающим понятием.

Вначале рассмотрим случай, когда высота сечения проводника d не превышает удвоенной толщины скин-слоя σ . Таким образом, в первом приближении можно считать, что высокочастотный ток, протекающий по проводнику прямоугольного сечения шириной w , сосредоточен в пределах тонкой полоски с высотой сечения $d = 2\sigma \ll w$. Устремим высоту сечения полоски к нулю: $d \rightarrow 0$. Тогда дискретная координата i -го проводника становится непрерывной: $(2i-1) \times r_0 \rightarrow y$, $h_2 + r_0 \rightarrow h_2$, а суммирование в (1) заменяется интегриро-

ванием по переменной y . В результате аналитическое выражение для геометрического индуктивного фактора тонкой металлической прямоугольной полоски длиной l и шириной w будет выглядеть следующим образом (4).

Для компактной записи результата интегрирования введем алгебраический оператор (5).

Тогда выражение (4) можно записать в компактном виде:

$$F_{np} = (\mu_0/2\pi \times w) \times [\lambda(h+h_0+w) - \lambda(h+h_0) - \lambda(h_0+w) + \lambda(h_0)]. \quad (6)$$

На рис. 2 приведены рассчитанные по формуле (6) значения зависимости ГИФ полоски металлизации длиной $l = 5$ мм, шириной $w = 0,4$ мм, от ширины контура при условии $d \ll w$.

Частным случаем взаиморасположения проводника и контура является их нахождение в одной плоскости, при этом $h_2 = 0$. Тогда выражение (5) упрощается:

$$\beta(p) = \left[\frac{1}{2} \left(p(\sqrt{l^2 + p^2} - p) - l^2 \ln(p + \sqrt{l^2 + p^2}) + l \left(p \ln \left(\frac{p}{l + \sqrt{l^2 + p^2}} \right) \right) \right) \right], \quad (7)$$

а выражение (4) можно записать в таком виде:

$$F_{np} = (\mu_0/2\pi \times w) \times [\beta(h+h_0+w) - \beta(h+h_0) - \beta(h_0+w) + \beta(h_0)]. \quad (8)$$

На рис. 3 приведена зависимость ГИФ полосок металлизации, рассчитанных по формуле (8).

В случае примыкания магнитного контура к проводнику ($h_0 = 0$), $\beta(0) = 0$, тогда выражение (8) упрощается:

$$F_{np} = (\mu_0/2\pi \times w) \times [\beta(h+w) - \beta(h_0) - \beta(w)]. \quad (8a)$$

Рассмотрим случай, когда плоскость прямоугольного контура, расположенного в створе тонкого проводника, перпендикулярна плоскости проводника и делит сечение проводника на две одинаковые половины высотой $d/2$ (рис. 4).

Величина ГИФ при представлении проводника набором N проводников круглого сечения диаметром $d = 2r_0 = w$ с учетом симметрии относительно плоскости XOY:

$$F_{np} = 2 \sum_{i=1}^{N/2} F_i, \quad (9)$$

где F_i определяется выражением (2);

$$h_{i1} = \sqrt{\left(h_2 + \frac{w}{2} \right)^2 + \frac{w^2}{4} (2i-1)^2} - \frac{w}{2};$$

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{w}{2} + h_1 + h \right)^2 + \frac{w^2}{4} (2i-1)^2} - \sqrt{\left(h_1 + \frac{w}{2} \right)^2 + \frac{w^2}{4} (2i-1)^2}.$$

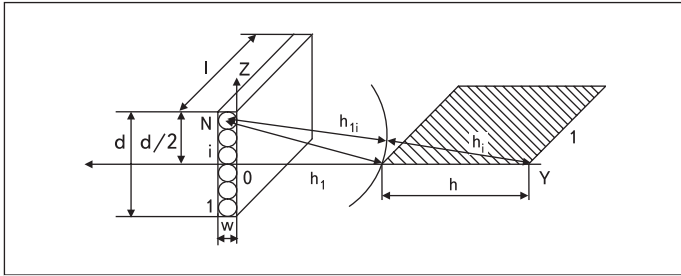


Рис. 4. Схема, иллюстрирующая получение формулы для расчета ГИФ прямоугольной полоски фольги по отношению к прямоугольному контуру, расположенному в перпендикулярной плоскости

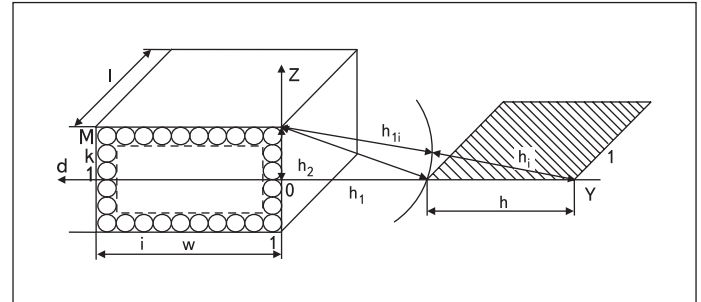


Рис. 6. Расчет ГИФ проводника с прямоугольным поперечным сечением с учетом скин-эффекта

$$\begin{aligned} \xi(l, d, X) = & \frac{d}{2} \left[\sqrt{l^2 + X^2 + (d/2)^2} - \sqrt{X^2 + (d/2)^2} \right] - l^2 \times \ln \frac{d/2 + \sqrt{l^2 + X^2 + (d/2)^2}}{\sqrt{l^2 + (d/2)^2}} + \\ & + X^2 \times \ln \frac{(d/2 + \sqrt{l^2 + X^2 + (d/2)^2}) \times X}{\sqrt{l^2 + X^2} \times (d/2 + \sqrt{X^2 + (d/2)^2})} - l \times d \times \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + X^2 + (d/2)^2}}{\sqrt{X^2 + (d/2)^2}} + \\ & + 2l \times X \times \left[\arctg \left(\frac{d}{2X} \right) - 2 \times \left(\arctg \left(\frac{d/2 + l + \sqrt{l^2 + X^2 + (d/2)^2}}{X} \right) - \arctg \left(\frac{l + \sqrt{l^2 + X^2}}{X} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Устремив толщину фольги w к нулю, перейдем в выражении (9) от суммирования к интегрированию по переменной z . В результате получим:

$$F_{II} = (\mu_0/\pi \times d) \times [\xi(l, d, h+h_1) - \xi(l, d, h_1)], \quad (10)$$

где (11).

Частным случаем взаиморасположения проводника и контура является $h_1 = 0$. Тогда выражение (10) можно записать в виде:

$$F_{II} = (\mu_0/\pi \times d) \times [\xi(l, d, h)]. \quad (12)$$

На рис. 5 приведены значения зависимости от ширины контура ГИФ полосок металлизации, рассчитанных по формулам (10–12), $l = 5,0$ мм, $d = 0,2$ мм. В отличие от графиков, представленных на рис. 2–3, ГИФ проводника, плоскость которого перпендикулярна плоскости контура, характеризуется большей ве-

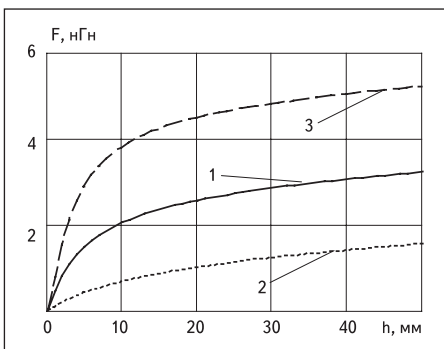


Рис. 5. ГИФ прямоугольной полоски фольги по отношению к прямоугольному контуру, расположенному в перпендикулярной плоскости: 1) $h_1 = 3$ мм; 2) $h_1 = 10$ мм; 3) $h_1 = 0$ мм

личной и большей зависимостью от ширины контура при $h \gg d$.

Для учета скин-эффекта в проводнике конечной толщины будем считать, что весь протекающий по проводнику ток с комплексной амплитудой \dot{I} сосредоточен, в приближении постоянной плотности, в приповерхностной области, толщина которой равна удвоенной толщине скин-слоя r_0 (рис. 6).

Комплексная амплитуда 1-й гармоники потока взаимоинойдукции $\dot{\Phi}_i$ в плоском контуре шириной h , отстоящего от проводника на расстоянии h_1 , может быть найдена как сумма комплексных амплитуд магнитных потоков, наводимых токами, протекающими по приповерхностным областям граней проводника:

$$\dot{\Phi}_i = \dot{\Phi}_\perp + \dot{\Phi}'_\perp + 2 \times \dot{\Phi}_\parallel, \quad (13)$$

здесь $\dot{\Phi}_\parallel$ — магнитные потоки от параллельных плоскостей контура участков слоя толщиной $2r_0$; $\dot{\Phi}_\perp, \dot{\Phi}'_\perp$ — соответственно магнитные потоки от ближнего и дальнего перпендикулярных плоскостей контура участков токового слоя.

С учетом симметрии сечения проводника относительно оси OY выражение (13) можно записать в виде:

$$\dot{\Phi}_i = 2 \times (\dot{\Phi}'_{\perp B} + \dot{\Phi}_{\perp B} + \dot{\Phi}_\parallel), \quad (14)$$

где $\dot{\Phi}'_{\perp B}, \dot{\Phi}_{\perp B}$ — магнитные потоки от «верхних» (расположенных над осью OY) частей участков токового слоя, перпендикулярных плоскости контура.

Представим каждый участок, поток от которого фигурирует в выражении (14), набором проводников круглого сечения диаметром $2r_0$. Тогда для участков, параллельных плоскости контура:

$$\dot{\Phi}_{II} = \sum_{i=1}^N \dot{\Phi}_i; \quad N = \frac{w}{2r}, \quad (15)$$

где $\dot{\Phi}_i$ вычисляется по формулам (2), (4–6).

Аналогичным образом определим магнитные потоки для участков сечения проводника, перпендикулярных плоскости контура, с учетом выражения (11):

$$\dot{\Phi}'_{\perp B} = \frac{\mu_0 \dot{I}}{2\pi \times (d+w)} \times [\xi(l; d; h_1) - \xi(l; d; h+h_1)], \quad (16)$$

$$\dot{\Phi}_{\perp B} = \frac{\mu_0 \dot{I}}{2\pi \times (d+w)} \times [\xi(l; d; w+h_1) - \theta(l; d; h+w+h_1)]. \quad (17)$$

Искомое выражение для геометрического индуктивного фактора проводника с прямоугольным сечением по отношению к отстоящему на расстоянии h_1 прямоугольному контуру с учетом скин-эффекта получается делением на \dot{I} правой части формулы (13).

На рис. 7 приведены значения зависимости ГИФ проводников с прямоугольным поперечным сечением от ширины контура, рассчитанных по формуле (12) при значениях $l = 5,0$ мм, $d = 0,5$ мм, $w = 0,2$ мм.

Сравнение рис. 3, 5, 7 показывает, что основной вклад в величину ГИФ проводника, ориентированного по отношению к прямоугольному контуру, как это показано на рис. 6, вносит приповерхностный токовый слой, рас-

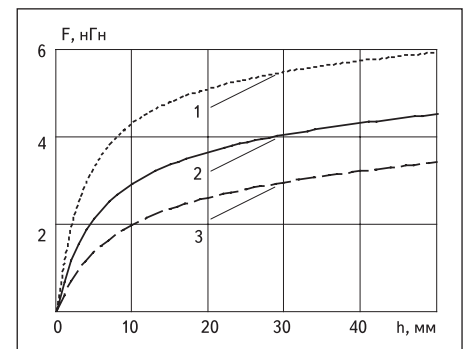


Рис. 7. ГИФ проводника с прямоугольным поперечным сечением с учетом скин-эффекта: 1) $h_1 = 1$ мм; 2) $h_1 = 3$ мм; 3) $h_1 = 5$ мм

положенный перпендикулярно плоскости контура и наводящий магнитный поток величиной $2\dot{\Phi}_{1B}$.

Результаты вычислений по полученным выражениям в предельных случаях ($h \rightarrow \infty$) совпадают с расчетами индуктивностей проводников с прямоугольным поперечным сечением по известным формулам [1, 3]. Формулы (11), (12) согласуются с выражениями для индуктивностей двухпроводных и микрополосковых линий [1–3]. В то же время полученные выражения позволяют осуществлять трехмерное моделирование индукционных взаимодействий в системах соединений ВЧ- и СВЧ-транзисторов и твердотельных ВЧ (СВЧ) усилителей мощности в гибридном исполнении, учитывать конечную ширину контуров, в которых наводятся потоки самоиндукции и взаимоииндукции. В условиях сильно выраженного скин-эффекта ($\sigma \ll d$) отличие новых формул особенно проявляется при вычислении магнитных потоков в контурах, ширина которых сопоставима с шириной или высотой сечения проводника, что характерно как для ленточных проводников (фольга на полиимидной основе), так и балочных и планарных внутрикорпусных полосковых соединений ВЧ (СВЧ) транзисторов и усилительных ГИС. ■

Литература

1. Данилин В. Н. Аналоговые полупроводниковые интегральные схемы СВЧ. М.: Радио и связь, 1985.
2. Антенны и устройства СВЧ / Под ред. Д. И. Воскресенского. М.: Радио и связь, 1981.
3. Калантаров П. Л. Расчет индуктивностей / Справочник. Л.: Энергоатомиздат, 1986.
4. Булгаков О. М. Композиционные модели индукционных взаимодействий в мощных ВЧ- и СВЧ-транзисторах. Воронеж: Воронежский государственный университет, 2005.