

Моделирование цифровой обработки сигналов в MATLAB.

Часть 4. Моделирование структур цифровых фильтров с фиксированной точкой программными средствами MATLAB: анализ характеристик КИХ-фильтров

Алла СОЛОНИНА

Основные этапы проектирования цифровых фильтров (ЦФ) были рассмотрены в [6], первый этап проектирования — синтез оптимальных КИХ- и БИХ-фильтров программными средствами MATLAB¹ — в [6, 7], второй этап — выбор структуры ЦФ и ее описание — в [8]. До сих пор предполагалось, что в структуре ЦФ все данные (входные, промежуточные и выходные) представлены числами бесконечной разрядности, которым в MATLAB условно сопоставлены числа максимальной разрядности типа double. В следующей серии статей будет рассмотрен третий этап проектирования ЦФ — моделирование программными средствами MATLAB структуры ЦФ с учетом эффектов квантования, обусловленных представлением данных с фиксированной точкой (ФТ), что необходимо при реализации ЦФ, например, на базе цифровых процессоров обработки сигналов (ЦПОС) с ФТ.

Квантование в структурах цифровых фильтров с фиксированной точкой

Квантованию — представлению с помощью конечного числа двоичных разрядов (битов) — могут подвергаться данные:

- бесконечной разрядности;
- конечной разрядности при усечении (округлении) до меньшего числа разрядов.

Как известно [2, 5], нелинейная процедура квантования сопровождается внесением в структуру ЦФ ошибок, источниками которых являются:

- Аналого-цифровой преобразователь (АЦП), вносящий в каждый момент нормированного времени n ошибку квантования, равную разности между дискретным $x(n)$ и цифровым $\tilde{x}(n)$ сигналами, называемую шумом АЦП.
- Умножители, отображающие в структуре ЦФ операцию умножения.

В структурах ЦФ на выходах сумматоров накапливаются суммы локальных произведений, для чего в архитектуре современных ЦПОС предусмотрена операция умножения с накоп-

лением — MAC (Multiplier/Accumulator), выполняемая во внутренних регистрах в формате расширенного слова. При сохранении конечного результата в формате слова в каждый момент нормированного времени n вносится ошибка квантования, называемая собственным шумом.

- Квантование коэффициентов передаточной функции ЦФ.

На этапе синтеза коэффициенты b_i, a_k передаточной функции ЦФ (1) [8] представляются числами типа double (условно бесконечной разрядности). Однако в структуре ЦФ с ФТ они заменяются квантованными коэф-

фициентами \tilde{b}_i, \tilde{a}_k , что вносит не зависящую от времени ошибку квантования коэффициентов, влияющую на характеристики ЦФ.

- Сумматоры, отображающие в структуре ЦФ операцию сложения.

При сложении локальных произведений с ФТ промежуточный результат хранится в формате расширенного слова. Если при сохранении конечного результата в формате слова результат по модулю превосходит единицу, возникают ошибки переполнения.

Модели ЦФ — линейная и нелинейная, соответственно, с неквантованными и квантованными данными — изображены на рис. 1, где приняты условные обозначения:

- $x(n), y(n)$ — дискретные, а $\tilde{x}(n), \tilde{y}(n)$ — цифровые (квантованные) входной и выходной сигналы;
- $H(z)$ — передаточная функция с неквантованными, а $\tilde{H}(z)$ — с квантованными коэффициентами.

Нелинейную модель ЦФ с квантованными данными (рис. 1б) коротко называют ЦФ с ФТ.

Теоретический анализ шумов квантования в ЦФ с ФТ чрезвычайно сложен, вследствие явных и неявных взаимосвязей шумов с квантуемыми сигналами и между собой. Нелинейная модель обычно исследуется посредством

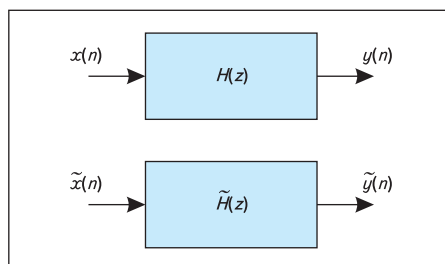


Рис. 1. Модели ЦФ:
а) линейная с неквантованными данными;
б) нелинейная с квантованными данными

¹ Версии MATLAB R2008a (MATLAB 7.6 Release 2008a).

компьютерного моделирования. Аналитические же оценки шумов (детерминированные и вероятностные) получены лишь при определенных допущениях, позволяющих существенно упростить анализ случайного процесса в ЦФ с ФТ [1, 2, 5].

Моделирование структуры КИХ-фильтра с фиксированной точкой

В MATLAB весьма широко представлены средства моделирования структур ЦФ с ФТ в пакетах расширения Filter Design Toolbox и Fixed Point Toolbox. В серии статей, начиная с настоящей, рассматривается методика моделирования структур ЦФ с ФТ, иллюстрируемая конкретными примерами. Данная методика согласуется с предлагаемой в MATLAB; с ней можно познакомиться, обратившись к справочной системе в формате HTML, используя поиск по ключевой фразе “Quantized Filters” (квантованные фильтры).

Моделирование структуры КИХ-фильтра с ФТ начитается с описания его исходной структуры (с неквантованными данными) в виде объекта `dfilt`, что можно сделать двумя способами, с которыми мы познакомились ранее [8]:

- синтезировать КИХ-фильтр по заданным требованиям к АЧХ, выбрать требуемую структуру фильтра и описать ее в виде объекта `dfilt`;
- синтезировать КИХ-фильтр непосредственно в виде объекта `dfilt` по требованиям к АЧХ, описанным в виде объекта `fdesign`; в этом случае структура КИХ-фильтра выбирается автоматически, и для ее изменения придется воспользоваться функцией `convert`.

Характерной особенностью исходных структур КИХ-фильтров (объектов `dfilt`) является значение свойства `Arithmetic: 'double'`. Это значит, что в исходной структуре КИХ-фильтра все данные — коэффициенты передаточной функции, воздействие, результаты выполнения арифметических операций при вычислении реакции и сама реакция — представлены числами максимальной разрядности типа `double` (условно бесконечной).

В дальнейшем для краткости используем терминологию: исходным КИХ-фильтром будем называть исходную структуру КИХ-фильтра, описанную в виде объекта `dfilt` со значением свойства `Arithmetic: 'double'`.

Для моделирования структур ЦФ с ФТ в пакете расширения Filter Design Toolbox предусмотрена возможность модификации объекта `dfilt` при значении свойства `Arithmetic: 'fixed'`.

Соответствующие структуры ЦФ с ФТ в MATLAB называются Quantized Filters (квантованными фильтрами) или Fixed-Point Filters (фильтрами с ФТ); группа фильтров Quantized Filters включает в себя Fixed-Point Filters, а также Floating-Point Filters (фильтры с плавающей точкой).

В дальнейшем используем принятую в MATLAB терминологию: КИХ-фильтром с ФТ (Fixed-Point FIR Filter) будем называть структуру КИХ-фильтра с ФТ, описанную в виде объекта `dfilt` со значением свойства `Arithmetic: 'fixed'`.

Исходный КИХ-фильтр

В качестве исходного КИХ-фильтра выберем объект `Hf3` — оптимальный КИХ-фильтр (Equiripple filter), синтезированный непосредственно в виде объекта `dfilt` с автоматически выбранной прямой структурой Direct-Form FIR, впоследствии с помощью функции `convert` преобразованной в прямую приведенную структуру Direct-Form Symmetric FIR (пример 9 в [8]).

Пример 1

Вывести свойства исходного КИХ-фильтра — объекта `Hf3`:

```
>> load Hf3
>> Hf3
Hf3 =
  FilterStructure: 'Direct-Form Symmetric FIR'
  Arithmetic: 'double'
  Numerator: [1x41 double]
  PersistentMemory: false
```

Выведенные свойства объекта `Hf3` — объекта `dfilt` с `Arithmetic: 'double'` — комментировались в [8].

КИХ-фильтр с ФТ и его свойства

КИХ-фильтр с ФТ формируется на основе исходного КИХ-фильтра путем присваивания свойству `Arithmetic` значения `'fixed'`.

Пример 2

Сформировать КИХ-фильтр с ФТ в виде объекта `Hq3` на основе исходного КИХ-фильтра — объекта `Hf3` (пример 1) и сохранить объект `Hq3` на диске:

```
>> load Hf3
>> Hq3=copy(Hf3);
>> set(Hq3,'Arithmetic','fixed')
>> save Hq3
```

Список основных свойств КИХ-фильтра с ФТ, доступных пользователю, выводится по имени объекта `dfilt`. Полный список свойств, включающий основные свойства, а также свойства, при определенных условиях доступные пользователю, выводится с помощью функции:

```
get(<имя объекта>)
```

Пример 3

Для КИХ-фильтра с ФТ — объекта `Hq3` (пример 2) — вывести список основных свойств по его имени (табл. 1, левый столбец) и полный список свойств с помощью функции `get` (табл. 1, правый столбец).

Таблица 1. Список основных свойств КИХ-фильтра с ФТ

Основные свойства	Полный список свойств
<pre>>> Hq3 Hq3 = FilterStructure: 'Direct-Form Symmetric FIR' Arithmetic: 'fixed' Numerator: [1x41 double] PersistentMemory: false CoeffWordLength: 16 CoeffAutoScale: true Signed: true InputWordLength: 16 InputFracLength: 15 FilterInternals: 'FullPrecision'</pre>	<pre>>> get(Hq3) PersistentMemory: 0 NumSamplesProcessed: 0 FilterStructure: 'Direct-Form Symmetric FIR' States: [40x1 embedded.fi] Numerator: [1x41 double] Arithmetic: 'fixed' CoeffWordLength: 16 CoeffAutoScale: 1 Signed: 1 RoundMode: 'convergent' OverflowMode: 'wrap' InputWordLength: 16 InputFracLength: 15 NumFracLength: 17 FilterInternals: 'FullPrecision' OutputWordLength: 34 OutputFracLength: 32 ProductWordLength: 32 ProductFracLength: 32 AccumWordLength: 34 AccumFracLength: 32 TapSumWordLength: 17 TapSumFracLength: 15</pre>

Свойства, выделенные полужирным шрифтом (табл. 1, правый столбец), будут использованы далее.

Назначение свойств ЦФ с ФТ дается в [5]. (Отметим, что в версии MATLAB 7.0, описываемой в [5], имеются расхождения в свойствах по сравнению с версией MATLAB 7.6, используемой в данной статье.)

Подробную информацию о свойствах объектов `dfilt` с различными структурами можно получить с помощью справочной системы MATLAB в формате HTML, используя поиск по ключевой фразе “Quantized Filters” и обращаясь к разделам, описывающим объекты `dfilt` с различными структурами.

Необходимые свойства, используемые далее, будут поясняться по мере изложения материала.

Дополнительные функции MATLAB для объектов с ФТ

В [8] рассмотрены основные функции MATLAB из пакетов Signal Processing Toolbox и Filter Design Toolbox для объектов `dfilt` (см. табл. 2 в [8]). Большинство из них можно использовать и для объектов `dfilt` с ФТ. Помимо этого в пакет Filter Design Toolbox включен набор дополнительных функций для объектов `dfilt` с ФТ (табл. 2). Полный список функций может быть выведен с помощью справочной системы MATLAB в формате HTML, при помощи поиска по ключевой фразе “Quantized Filters”, при обращении к разделу **Function Reference** (справка по функциям) и гипертекстовой ссылке **Quantized Filters Analysis Functions** (функции анализа квантованных фильтров).

Квантование коэффициентов в КИХ-фильтрах с ФТ

Процедуру квантования коэффициентов в КИХ-фильтрах с ФТ поясним на примерах.

Пример 4

Вывести неквантованные коэффициенты передаточной функции исходного КИХ-филь-

Таблица 2. Дополнительные функции MATLAB для объектов dfilt с ФТ

Функция	Назначение
denormalize(Hq)	Возвращает исходный объект Hq с ненормированными коэффициентами (отменяет действие функции normalize). Не вносит изменений, если коэффициенты не нормировались
Hpsd=noisepsd(Hq,L)	Возвращает массив записей Hpsd, поле Hpsd.data которого хранит значения PSD* выходного шума объекта Hq (ЦФ с ФТ). L — количество реализаций, по которым усредняется PSD (по умолчанию L = 10). Средняя мощность шума вычисляется с помощью функции avgpower(Hpsd). График PSD выводится с помощью функции plot(Hpsd)
norm(Hq,'norm')	Для каскадных структур БИХ-фильтров с ФТ выполняет масштабирование, предотвращающее или минимизирующее ошибки переполнения
normalize(Hq) K=normalize(Hq)	Нормирует коэффициенты числителя передаточной функции объекта Hq к максимальному по модулю значению и возвращает нормирующий множитель K. Для каскадных структур БИХ-фильтров с ФТ нормируются коэффициенты числителей передаточных функций каждого звена отдельно, и K представляет собой вектор-столбец

* PSD (Power Spectral Density) — спектральная плотность мощности.

тра (объекта Hf3 в примере 1), присваивая вектору коэффициентов (свойство Numerator) имя bf3:

```
>> load Hf3
>> bf3=get(Hf3,'Numerator')
bf3 =
Columns 1 through 7
-0.0008 0.0067 0.0017 -0.0002 0.0037 -0.0044 -0.0194
Columns 8 through 14
-0.0022 0.0314 0.0180 -0.0207 -0.0141 -0.0015 -0.0342
Columns 15 through 21
-0.0111 0.1021 0.0889 -0.1221 -0.1943 0.0554 0.2441
Columns 22 through 28
0.0554 -0.1943 -0.1221 0.0889 0.1021 -0.0111 -0.0342
Columns 29 through 35
-0.0015 -0.0141 -0.0207 0.0180 0.0314 -0.0022 -0.0194
Columns 36 through 41
-0.0044 0.0037 -0.0002 0.0017 0.0067 -0.0008
```

Значения коэффициентов bf3 по модулю не превосходят единицы, поэтому их нормирование не требуется, и для дальнейших исследований можно воспользоваться ранее созданным КИХ-фильтром с ФТ — объектом Hq3 (пример 2).

Пример 5

Создать объект Hq3c1 — копию объекта Hq3 (пример 2). Установить в нем требуемые значения свойств, связанных с квантованием коэффициентов, и сохранить объект Hq3c1 на диске.

Свойства объекта Hq3, установленные по умолчанию, были выведены ранее (табл. 1). Среди них с квантованием коэффициентов КИХ-фильтров связаны следующие свойства (в табл. 1 они выделены полужирным шрифтом):

```
CoeffWordLength:16
CoeffAutoScale:1
Signed:1
NumFracLength:17
```

Поясним коротко их смысл:

- **CoeffWordLength** — отображает формат представления коэффициентов передаточной функции КИХ-фильтра (см. формулу (5) в [8]) — слово.
- **NumFracLength** — длина дробной части в слове **CoeffWordLength**.
- **CoeffAutoScale** — флаг, при сбросе которого (значении 0) можно произвольно задавать длину дробной части **NumFracLength**.
- **Signed** — флаг, управляющий знаковыми (при установке) или беззнаковыми (при

сбросе) коэффициентами передаточной функции КИХ-фильтра.

В объекте Hq3c1 оставим неизменными значения свойств **CoeffWordLength: 16** и **Signed: 1**, но изменим длину дробной части **NumFracLength**, для чего предварительно установим **CoeffAutoScale: 0**. Сохраним объект Hq3c1 с новыми свойствами на диске:

```
>> load Hq3
>> Hq3c1=copy(Hq3);
>> set(Hq3c1,'CoeffAutoScale',0)
>> set(Hq3c1,'NumFracLength',15)
>> save Hq3c1
```

Значения квантованных коэффициентов bq3c1 объекта Hq3c1 можно вывести с помощью функции:

```
>> bq3c1=get(Hq3c1,'Numerator')
```

Для того чтобы увидеть отличие квантованных коэффициентов от неквантованных, выведенных в примере 4, следует установить формат **format long**.

Пример 6

Создать объект Hq3c2 — копию объекта Hq3 (пример 2). Установить в нем требуемые значения свойств, связанных с квантованием коэффициентов, и сохранить объект Hq3c2 на диске:

```
>> load Hq3
>> Hq3c2=copy(Hq3);
>> set(Hq3c2,'CoeffWordLength',8)
>> set(Hq3c2,'CoeffAutoScale',0)
>> set(Hq3c2,'NumFracLength',7)
>> save Hq3c2
```

Выведем значения квантованных коэффициентов bq3c2 объекта Hq3c2:

```
>> bq3c2=get(Hq3c2,'Numerator')
bq3c2 =
Columns 1 through 7
0 0.0078 0 0 0 -0.0078 -0.0156
Columns 8 through 14
0 0.0313 0.0156 -0.0234 -0.0156 0 -0.0313
Columns 15 through 21
-0.0078 0.1016 0.0859 -0.1250 -0.1953 0.0547 0.2422
Columns 22 through 28
0.0547 -0.1953 -0.1250 0.0859 0.1016 -0.0078 -0.0313
Columns 29 through 35
0 -0.0156 -0.0234 0.0156 0.0313 0 -0.0156
Columns 36 through 41
-0.0078 0 0 0 0.0078 0
```

Сравнивая полученные квантованные коэффициенты с неквантованными (пример 4), видим их отличия и без установки **format long**.

Анализ характеристик КИХ-фильтров с ФТ

Для анализа характеристик КИХ- и БИХ-фильтров с ФТ можно воспользоваться функцией **fvtool** следующего формата:

```
h=fvtool(Hd1,Hd2,...)
```

Здесь **h** — объект, представляющий собой окно **Figure... Filter Visualization Tool** программы **GUI FVTool** с автоматически выведенными характеристиками ослабления АЧХ (дБ) (см. формулу (5) в [6]) объектов **Hd1**, **Hd2** и т. д.

Как обычно, свойства объекта **h** выводятся с помощью функции:

```
get(h)
```

а устанавливаются с помощью функции:

```
set(h,'name1',value1,'name2',value2,...)
```

Функция **fvtool** указанного формата обеспечивает интерактивное общение с **GUI FVTool**. Основные свойства объекта **h** представлены в таблице 3.

Таблица 3. Основные свойства интерактивного общения с GUI FVTool

Свойство	Назначение
Filters	Возвращает информацию о структурах объектов dfilt в виде массива ячеек (cell array)
Analysis	Управляет выводом характеристик в графическом окне GUI FVTool и может принимать значения, соответствующие командам пункта меню Analysis : <ul style="list-style-type: none"> • 'magnitude' — Magnitude Response (АЧХ); • 'phase' — Phase Response (ФЧХ); • 'freq' — Magnitude and Phase Responses (АЧХ и ФЧХ); • 'grpdelay' — Group Delay Response (ГБЗ); • 'phasedelay' — Phase Delay (фазовая задержка); • 'impulse' — Impulse Response (импульсная характеристика); • 'step' — Step Response (переходная характеристика); • 'polezero' — Pole / Zero Plot (карта нулей и полюсов); • 'coefficients' — Filter Coefficients (коэффициенты передаточной функции); • 'info' — Filter Information (свойства фильтра — объекта dfilt); • 'magestimate' — Magnitude Response Estimate (оценка АЧХ); • 'noisepower' — Round-off Noise Power Spectrum (энергетический спектр шума округления*)
grid	Управляет наличием сетки при выводе графика и может принимать значение 'on' (по умолчанию) или 'off'
legend	Управляет размещением легенды и может принимать значение 'on' или 'off' (по умолчанию). Размещение легенды выполняется с помощью функции: set(h,'legend','on') , после чего размещается легенда с помощью функции legend
Fs	Позволяет указывать частоту дискретизации в кГц вместо нормированной частоты, указываемой по умолчанию. Например: set(h,'Fs',8)
Show-Reference	Управляет автоматическим выводом характеристики исходного фильтра (с неквантованными коэффициентами) и может принимать значения 'on' (по умолчанию), если характеристика исходного фильтра выводится, или 'off' — если не выводится

* Вычисляется для квадратов мгновенных значений шума.

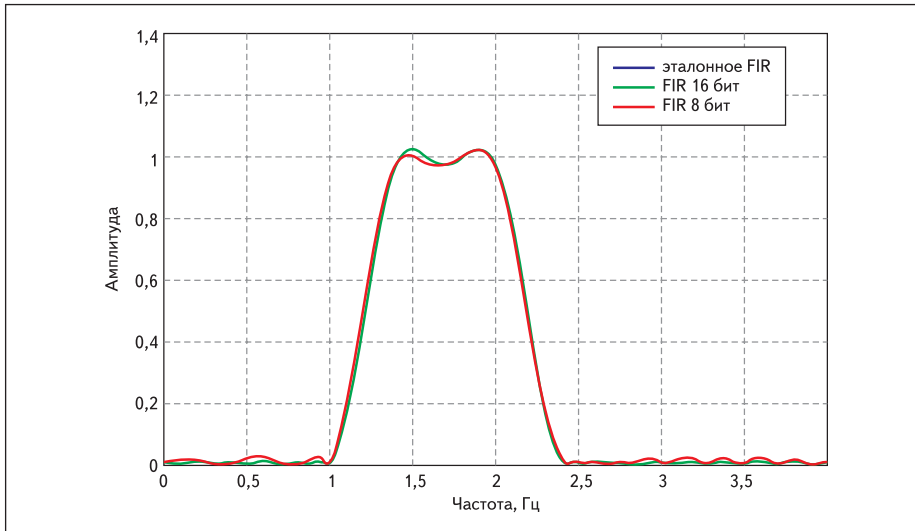


Рис. 2. АЧХ КИХ-фильтров с неквантованными и квантованными коэффициентами

Пример 7

Вывести графики АЧХ:

- исходного КИХ-фильтра с неквантованными коэффициентами — объекта Hf3 (пример 4);
- КИХ-фильтра с ФТ с 16-разрядными коэффициентами — объекта Hq3c1 (пример 5);
- КИХ-фильтра с ФТ с 8-разрядными коэффициентами — объекта Hq3c2 (пример 6).
Указать частоту дискретизации 8 кГц (она использовалась при синтезе исходного КИХ-фильтра [6]) и разместить легенду (рис. 2):

```
>> load Hf3
>> load Hq3c1
>> load Hq3c2
>> h=fvtool(Hf3,Hq3c1,Hq3c2);
>> set(h,'ShowReference','off')
>> set(h,'Fs','8','legend','on')
>> legend(h,'Reference FIR','FIR 16 bits','FIR 8 bits')
```

Для вывода АЧХ вместо АЧХ (дБ) — характеристики ослабления (5) [6], выводимой по умолчанию, в пункте меню **Analysis** (анализ) была выбрана команда **Analysis Parameters** (параметры анализа) и в раскрывающемся списке **Magnitude Display** (вывод АЧХ) — значение **Magnitude** (АЧХ).

АЧХ исходного КИХ-фильтра и КИХ-фильтра с 16-разрядными коэффициентами практически совпали, а с 8-разрядными отличаются.

Выбирая в пункте меню **Analysis** соответствующие команды, можно вывести другие характеристики КИХ-фильтров. ■

Литература

1. Ingle V., Proakis J. Digital Signal Processing Using MATLAB. Second Edition — Thomson.
2. Опенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2006.
3. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов, 2-е изд. СПб.: ПИТЕР, 2006.
4. Солонина А. И., Улахович Д. А., Арбузов С. М., Соловьева Е. Б. Основы цифровой обработки сигналов. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
5. Солонина А. И., Арбузов С. М. Цифровая обработка сигналов. Моделирование в MATLAB. СПб.: БХВ-Петербург, 2008.
6. Солонина А. Моделирование цифровой обработки сигналов в MATLAB. Часть 1. Синтез оптимальных (по Чебышеву) КИХ-фильтров программными средствами MATLAB // Компоненты и технологии. 2008. № 11.
7. Солонина А. Моделирование цифровой обработки сигналов в MATLAB. Часть 2. Синтез оптимальных БИХ-фильтров программными средствами MATLAB // Компоненты и технологии. 2008. № 12.
8. Солонина А. Моделирование цифровой обработки сигналов в MATLAB. Часть 3. Описание структур КИХ- и БИХ-фильтров в MATLAB // Компоненты и технологии. 2009. № 1.