

# Синтез параметрического избирательного фильтра СВЧ-диапазона

Олег GERMANOVICH  
Игорь KACAN  
Герман PARANTAEB

**В статье описан алгоритм синтеза параметрического избирательного фильтра СВЧ-диапазона по заданной форме селектируемого сигнала и обсуждены некоторые проблемы, возникающие в процессе проектирования этого фильтра.**

Среди многочисленных разделов теории управления одним из перспективных и быстро развивающихся является направление, в котором для целей управления используются периодические воздействия.

Практическое осуществление такого рода воздействий технически легко реализуемо, расширяет функциональные возможности управления и при современном уровне развития техники и технологии позволяет, с одной стороны, достичь высокой стабильности параметров сигнала управления и, с другой стороны, обеспечить необходимое и разнообразное регулирование управляемого объекта.

Особое место в рамках этого направления занимает управление линейными параметрическими колебательными системами с распределенными параметрами (ЛПКС с РП) СВЧ-диапазона.

Линейные параметрические колебательные системы с РП обладают ярко выраженным свойством избирательности по форме и чувствительности к фазе сигнала на входе устройства. В области СВЧ-частот (выше 1 ГГц), где ЛПКС с РП нет альтернативы, эти свойства ЛПКС с РП находят применение при создании на их основе фазовых детекторов и избирательных фильтров в системах, где осуществляется селекция сигналов по форме. При этом управляющее воздействие (сигнал накачки) посредством изменения параметров сигнала накачки позволяет обеспечивать регулирование характеристик устройств и осуществлять режим резонанса.

Быстроразвивающейся и перспективной областью современной радиотехники, в которой, несомненно, должны найти свое применение ЛПКС с РП, является радиовидение и интроскопия (радиолокационное поверхностное зондирование). В настоящее время ряд зарубежных фирм уже серийно выпускает РЛС для поверхностного зондирования (георадары). Хотя современные георадары обладают сравнительно небольшой глубиной зондирования (до 10–15 м), интерес к ним велик и объясняется обширным и важным

кругом задач, которые могут быть разрешены с их помощью.

Независимо от конкретного применения перед упомянутыми РЛС ставится задача определения радиолокационных характеристик (РЛХ) объекта как оператора рассеяния, отражающих связь параметров падающей на объект и отраженной волн. РЛХ объекта — это совокупность всех характеристик и параметров, описывающих связь между облучающей и отраженной волнами. Обычно сверхширокополосные РЛ характеристики представляют собой отклики объекта на типовые, тестовые воздействия — зондирующие поля. Семейство откликов, получаемое при использовании таких воздействий, называют семейством импульсных характеристик. Импульсную характеристику можно использовать для определения формы объекта, в интересах его распознавания или построения его радиоизображения.

Поскольку сигнал-отклик на зондирующий импульс даже от простейших, эталонных объектов является достаточно сложным по форме, то приемное устройство георадара помимо линейного широкополосного усилителя СВЧ-диапазона должно иметь в своем составе, по меньшей мере, соответствующий квазиоптимальный согласованный фильтр СВЧ-диапазона. Такой фильтр может быть организован на базе ЛПКС с РП, что является наилучшей аппаратной реализацией управляемого квазиоптимального согласованного фильтра СВЧ-диапазона. Однако в настоящее время преобладает тенденция осуществлять обработку радиосигналов только средствами вычислительной техники, что может быть реализовано лишь в мегагерцовом диапазоне частот. Поскольку сверхширокополосный (СШП) сигнал-отклик на зондирующий импульс расположен в диапазоне частот, достигающем нескольких гигагерц, то для обработки сигнала средствами вычислительной техники приходится при приеме СШП-сигналов применять устройства масштабно-временного преобразования сигналов с коэффициентом преобразо-

вания  $q = 10^2 \div 10^3$ , что неминуемо приводит к существенному увеличению времени анализа РЛХ.

Вместе с тем, несомненное улучшение характеристик георадаров может быть достигнуто в том случае, если осуществить первичную квазиоптимальную согласованную селекцию сигнала на СВЧ-уровне, то есть в гигагерцовом диапазоне частот. Поскольку в этом диапазоне частот квазиоптимальную фильтрацию алгоритмическими, цифровыми методами осуществить не удается, то единственным способом здесь является аппаратная реализация фильтрации сигнала. Решение этой задачи существенно усложняется тем, что сигнал является сверхширокополосным. В настоящее время, на наш взгляд, путь решения этой задачи существует и состоит в применении параметрических избирательных фильтров СВЧ-диапазона. Такие устройства позволяют не только осуществлять фильтрацию заданного сложного по форме сигнала, но и дают возможность легко и просто перестраивать устройство, адаптируя его под тот или иной сверхширокополосный сигнал, а также реализовывать различные квазиоптимальные процедуры обработки сложного сигнала.

Линейные параметрические колебательные системы с распределенными параметрами по сравнению с другими аппаратными методами и средствами наилучшим образом приспособлены для решения задач селекции сигналов сложной формы в СВЧ-диапазоне, поскольку они:

- позволяют осуществлять оптимальную согласованную селекцию сигналов сложной формы на частотах порядка единиц гигагерц и более, то есть на входе приемных устройств;
- допускают быстрое синтезирование их для достижения эффективной селекции конкретных сигналов-откликов на зондирующий импульс от эталонных объектов;
- допускают простое и эффективное управление параметрами с целью их перестройки и адаптации под заданный селектируемый сигнал.

На рисунке представлены структурные схемы приемных устройств георадара.

По совокупности возможностей ЛПКС с РП СВЧ-диапазона составляют, на наш взгляд, серьезную конкуренцию в СВЧ-диапазоне методам, использующим только цифровые фильтры в устройствах селекции сложных по форме сигналов, представляют оптимальное решение задач селекции сигналов сложной формы в приемных устройствах СШП РЛС радиовидения и интроскопии. Ниже рассматривается процедура синтеза параметрического избирательного фильтра СВЧ-диапазона для георадара.

Задача синтеза параметрического избирательного фильтра СВЧ-диапазона, обеспечивающего селекцию сигнала заданной формы, рассматривается в следующей постановке.

Предопределены структура (конструкция) параметрического избирательного фильтра, которая в силу априори заданного диапазона частот (СВЧ-диапазон) представляет собой колебательную систему с распределенными параметрами. Ниже рассматриваются только такие параметрические системы, которые организованы на основе одномерных волновых систем (ОВС) с параметрическими условиями на границе, и вид (форма) сигнала, селекция которого проектируемым параметрическим избирательным фильтром должна быть осуществлена.

Требуется определить закон изменения собственной частоты колебаний параметрического избирательного фильтра и указать алгоритм реализации режима, обеспечивающего селекцию сигнала заданной сложной формы.

В процедуре синтеза должна быть предусмотрена возможность как структурной, так и параметрической оптимизации устройства.

Решение поставленной задачи состоит из нескольких этапов.

### Выбор структуры параметрического избирательного фильтра и составление его математического описания

В качестве модельного примера параметрического избирательного фильтра СВЧ-диапазона рассмотрим линейную параметрическую колебательную систему с распределенными параметрами, выполненную в виде отрезка одномерной волновой системы (ОВС) без потерь, замкнутого на одном конце и имеющего параметрические условия первого порядка на другом. Отметим, что описываемый ниже алгоритм синтеза параметрического избирательного фильтра (ПИФ) сохраняется и в случае использования в качестве ПИФ более сложных структур, созданных на основе ОВС.

Колебательные процессы, протекающие в указанном выше устройстве, описываются линейным периодическим дифференциально-разностным уравнением нейтрального типа (ЛП ДРУ НТ) [1]:

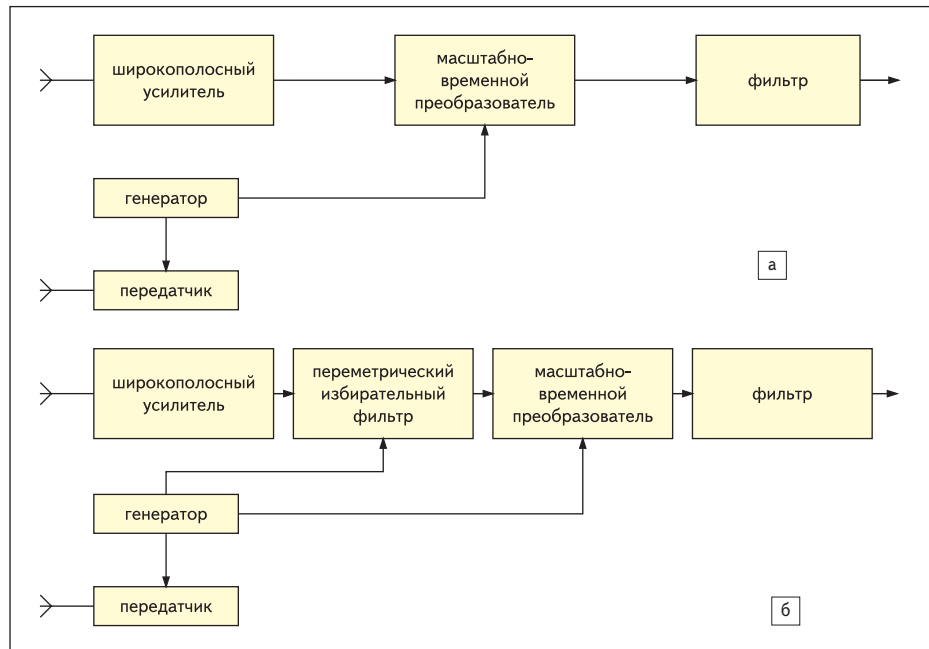


Рисунок. Структурные схемы приемных устройств георадара: а) традиционная; б) схема, использующая параметрический избирательный фильтр для первичной обработки СШ сигнала

$$\alpha \dot{q}(\theta) - \dot{q}(\theta - \theta_\tau) + b(\theta)q(\theta) + b(\theta - \theta_\tau)q(\theta - \theta_\tau) = 0, \quad (1)$$

где  $\theta = 2\pi(t/T)$ ,  $\theta_\tau = 2\pi(\tau/T)$ ,  $\omega = 2\pi/T$ ,  $\alpha = (\rho+r)/(\rho-r) > 0$ , при  $\rho > r$  (рассматривается случай малых потерь в ОВС),  $\rho$  — волновое сопротивление ОВС,  $T$  — период сигнала,  $\tau = 2l/v$  — время пробега волны в оба конца ОВС,  $v$  — скорость распространения волн в ОВС,  $l$  — длина ОВС, точкой обозначено дифференцирование по  $\theta$ ,  $r$  — величина, характеризующая потери на конце ОВС.

Пусть  $b(\theta_n) = \delta + \varepsilon \times \varphi(\theta_n)$ , где

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(\theta_n) d\theta_n \int_0^{2\pi} \varphi(\theta_n) d\theta_n = 0. \quad (2)$$

Тогда  $\delta \equiv \omega_0/\omega$ ,  $\theta_n = 2\pi(t/T_n)$ , где  $\omega_0$  — частота «настройки» фильтра,  $T_n$  — период накачки,  $\omega$  — частота сигнала.

Величины  $\varepsilon$  и  $\varphi(\theta_n)$  доопределим так:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2(\theta_n) d\theta_n = 1, \quad \text{тогда} \\ \varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (b(\theta_n) - \delta)^2 d\theta_n. \quad (3)$$

### Вычисление закона управления (сигнала накачки) по заданному селектируемому сигналу

Рассмотрим пространство параметров  $(\delta, \varepsilon)$ . В изучаемом случае таковым является плоскость. Каждая точка плоскости определяется координатами  $(\delta^*, \varepsilon^*)$ .

Основной задачей теории параметрического резонанса является нахождение (построение) границ зон динамической неустойчивости в пространстве параметров, поскольку

ку построение диаграмм устойчивости позволяет не только выбрать устойчивый режим параметрической колебательной системы, но и реализовать режим параметрического резонанса [1].

Каждой точке пространства параметров соответствует набор мультипликаторов решений Флоке дифференциального уравнения, описывающего поведение параметрической колебательной системы. Последние (решения Флоке) в совокупности позволяют построить произвольное решение дифференциального уравнения — математической модели параметрической колебательной системы.

В отличие от систем с конечным числом степеней свободы, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями, системы с распределенными параметрами, описываемые ЛП ДРУ НТ, имеют бесконечное (счетное) множество степеней свободы. Последнее проявляется в том, что каждой точке пространства параметров соответствует не конечное, а бесконечное (счетное) множество мультипликаторов решений Флоке. На практике мы встречаемся с так называемыми неконсервативными системами. Одной из важных особенностей таких систем является то, что у них возможен только так называемый режим основного резонанса. Кроме того, для неконсервативных систем характерна ситуация, когда на границе зоны динамической неустойчивости только один из множества мультипликаторов имеет модуль, равный 1. Оба указанных обстоятельства существенно упрощают процедуру построения границ зон динамической неустойчивости.

Диаграмма устойчивости является основным инструментом, с помощью которого можно правильно выбрать и реализовать

режим параметрического резонанса, описанный в работе [1]. Вместе с тем, построение диаграммы устойчивости (границ зон динамической неустойчивости) выполняется обычно по заданному закону изменения собственной частоты параметрической колебательной системы с распределенными параметрами (в нашем случае  $b(\theta)$ ). В рассматриваемом случае вместо  $b(\theta)$  задана периодическая функция, обозначаемая в дальнейшем  $z(\theta)$ , выделение которой необходимо обеспечить. Согласно [1],  $z(\theta)$  — это периодическое решение ЛП ДРУ НТ, соответствующее некоторой точке  $(\delta_0, \varepsilon_0)$  границы зоны динамической неустойчивости. Таким образом, в силу отмеченной особенности поставленной задачи процедуре построения границ зон динамической неустойчивости должно предшествовать вычисление закона изменения собственной частоты параметрической колебательной системы  $b(\theta)$  по заданному селективируемому сигналу  $z(\theta)$ .

Известно, что параметрические избирательные системы с пространственно распределенными параметрами, описываемые ЛП ДРУ НТ вида (1), в том случае, когда  $\tau = (mT)/n$ , где  $m, n$  — произвольные целые взаимно простые числа, обладают свойством селекции сигналов сложной формы [1].

Рассмотрим условия реализации режима вынужденного резонанса при внешнем периодическом воздействии с частотой  $\omega$ . Известно, что режим вынужденного резонанса наблюдается, по меньшей мере, в том случае, когда соблюдено условие:

$$\omega_n = k\omega, \quad (4)$$

где  $\omega$  — круговая частота сигнала (внешнего воздействия),  $\omega_n$  — круговая частота накачки и  $k = 1, 2, \dots$ . Традиционно частота накачки обычно принимается равной удвоенной частоте сигнала. Заметим, что такой выбор частоты накачки связан не только с соображениями удобства обеспечения «развязки» цепей сигнала и накачки, но, зачастую, и с тем, что при  $k > 2$  могут возникать значительные трудности при практической реализации требуемого сигнала накачки.

Зададимся геометрией ОВС, которая определяется соотношением  $\tau = (mT)/n$ . Остановимся на рассмотрении случая  $\tau/T = m/n$ , где  $m = 1, n = 3$ . Воспользуемся (1) для вычисления  $b_0(\theta_n) = \delta_0 + \varepsilon_0 \varphi(\theta_n)$  по заданной периодической функции  $z(\theta)$ . Поскольку  $z(\theta)$  — заданная  $2\pi$  периодическая функция — решение ЛП ДРУ НТ (1), соответствующее точке  $(\delta_0, \varepsilon_0)$  границы зоны динамической неустойчивости пространства параметров, то:

$$z(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k \exp jk\theta, \text{ где}$$

$$C_k = \bar{C}_{-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(\theta) \exp(-jk\theta) d\theta. \quad (5)$$

Аналогично рассчитываем:

$$b_0(\theta_n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_{k,0} \exp jk\theta, \text{ где}$$

$$B_{k,0} = \bar{B}_{-k,0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b(\theta_n) \exp(-jk\theta) d\theta. \quad (6)$$

Поскольку  $\theta_n = s\omega$ , где  $s = 2, 3, 4, \dots$ , то в разложении  $b_0(\theta)$  в ряд Фурье (6) будут присутствовать только гармоники сигнала, кратные  $s$ , так что в (6) лишь

$$B_{sk,0} \neq 0. \quad (7)$$

Воспользуемся следующим соотношением:

$$\left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_{k,0} X^k \right) \times \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k X^k \right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X^k \left( \sum_{s=-\infty}^{+\infty} B_{s,0} C_{k-s} \right), \quad (8)$$

где в рассматриваемом случае  $X = \exp j\theta$ . Тогда, подставляя (5), (6) и (8) в (1), найдем (9).

В (9), приравняв к нулю коэффициенты при  $\exp jk\theta$ , получим:

$$jk(\alpha - \exp(-jk \frac{2\pi}{3}))C_k +$$

$$+ (1 + \exp(-jk \frac{2\pi}{3})) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} B_{s,0} C_{k-s} = 0, \quad (10)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

Воспользовавшись (10), вычислим коэффициенты Фурье  $B_{s,0}$  функции  $b(\theta_n)$ . На практике обычно сигнал накачки синтезируется на основе ограниченного числа гармоник накачки. При формировании сигнала накачки посредством суммирования ограниченного числа гармоник форма селективируемого сигнала может отличаться от требуемой. Поэтому фактическое количество гармоник накачки, которое необходимо для обеспечения селекции сигнала, достаточно близкого по форме к требуемому, существенно зависит от структуры спектра селективируемого сигнала. Рассмотрим в качестве примера следующий конкретный вид селективируемого сигнала, часто встречающийся на практике. Будем полагать, что селективируемый сигнал  $2\pi$  и периодическая функция  $\theta$ , задаваемая на интервале  $[-\pi, \pi]$  ведут так (вейвлет Морле):

$$z(\theta) = \exp(-\gamma\theta^2) \cos b\theta, \quad (11)$$

где  $b = 1, 2, 3, 4 \dots$

Тогда

$$C_k = \bar{C}_{-k} = \frac{1}{2} (A_k - jB_k);$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(\theta) \cos k\theta d\theta;$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} z(\theta) \sin k\theta d\theta = 0.$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \exp jk\theta \left( jk(\alpha - \exp(-jk \frac{2\pi}{3}))C_k + (1 + \exp(-jk \frac{2\pi}{3})) \sum_{s=-\infty}^{+\infty} B_{s,0} C_{k-s} \right) = 0. \quad (9)$$

Поскольку обычно  $\gamma \geq 2$  и  $b \geq 4$ , коэффициенты Фурье можно приближенно вычислять так:

$$A_k \approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} z(\theta) \cos k\theta d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma}} \left[ \exp(-\frac{(k-b)^2}{4\gamma}) + \exp(-\frac{(k+b)^2}{4\gamma}) \right]. \quad (12)$$

Рассмотрим конкретный случай:  $\gamma = 2, b = 4$  и  $\theta_n = b\omega$ . Тогда для сигнала вида (11) систему уравнений (10) с учетом (7) можно переписать так:

$$\sum_{s=-\infty}^{+\infty} B_{4s,0} A_{k-4s} =$$

$$= \frac{\alpha+1}{2} k \tan \frac{\pi k}{3} A_k - jk \frac{\alpha-1}{2} A_k, \quad (13)$$

где  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, A_k = A_{-k}$  и вычисляется согласно (12).

Если в (13) положить  $2B_{4s,0} = 2\bar{B}_{-4s,0} = X_{4s,0} - jY_{4s,0}$ , то систему уравнений (13) можно переписать так:

$$X_{0,0} A_k + \sum_{s=1}^{+\infty} X_{4s,0} (A_{k+4s} + A_{k-4s}) =$$

$$= (\alpha+1) k \tan \frac{\pi k}{3} A_k, \quad (14)$$

$$\sum_{s=1}^{+\infty} Y_{4s,0} (A_{k+4s} - A_{k-4s}) = -(\alpha-1) k A_k, \quad (15)$$

где  $k = 1, 2, 3, 4 \dots$

Тогда

$$b_0(\theta_n) = \delta_0 + \varepsilon_0 \varphi(\theta_n) =$$

$$= \delta_0 + \varepsilon_0 \sum_{s=1}^{+\infty} (\alpha_{4s,0} \cos 4s\theta + \beta_{4s,0} \sin 4s\theta),$$

где  $\delta_0, \varepsilon_0, \alpha_{4s,0}$  и  $\beta_{4s,0}$  определяются согласно (2) и (3) так:

$$\delta_0 = \frac{1}{2} X_{0,0}, \quad \varepsilon_0 = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{+\infty} (X_{4s,0}^2 + Y_{4s,0}^2)}$$

$$\alpha_{4s,0} = \frac{X_{4s,0}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{+\infty} (X_{4s,0}^2 + Y_{4s,0}^2)}},$$

$$\beta_{4s,0} = \frac{Y_{4s,0}}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{+\infty} (X_{4s,0}^2 + Y_{4s,0}^2)}}.$$

Для  $\alpha = 1,03, \gamma = 2$  и  $b = 4$  имеем  $\beta_0 = 14,85, \varepsilon_0 = 3,5$ . В таблице приведены значения  $\alpha_{4s}$  и  $\beta_{4s}$ , вычисленные согласно (14) и (15).

Следует отметить, что задача определения закона изменения частоты собственных колебаний параметрического избирательного

фильтра в той постановке, в которой она здесь рассматривается, относится к категории так называемых некорректно поставленных задач. В ходе выполнения вычислений сформулированная задача сведена к решению системы линейных алгебраических уравнений (14) и (15) с плохо обусловленной матрицей коэффициентов системы. Особенность некорректно поставленной задачи в рассматриваемом случае проявляется в том, что малым возмущениям коэффициентов системы соответствуют весьма существенные изменения ее решения. Для преодоления указанного затруднения и построения решений некорректно поставленных задач, устойчивых к малым возмущениям как матрицы коэффициентов системы, так и правых ее частей, используются эффективные алгоритмы построения так называемых регуляризованных решений [2, 3]. Для системы (14), (15) применен алгоритм построения регуляризованного решения с минимизацией невязки при помощи SVD-разложения для прямоугольной матрицы. Результаты расчетов представлены в таблице.

Таблица. Вычисленные значения

$4s$	4	8	12
$\alpha_{4s}$	-1,08	0,71	-
$\beta_{4s}$	0,59	0,005	-

### Построение границ зон динамической неустойчивости в пространстве параметров. Выбор режима параметрического резонанса, обеспечивающего селекцию сигнала заданной формы

Как показано в работе [1], уравнение (1) при  $b(\theta_n) > 0 \forall t \in [0, T_n]$  имеет счетное множество частных решений типа Флоке, а произвольное решение (1) представимо в форме разложения в ряд по таким частным решениям. Следовательно, устойчивость произвольного решения может быть установлена на основе совокупного рассмотрения множества мультипликаторов решений Флоке.

Кроме того, поскольку в описываемом (1) устройстве  $\alpha > 1$ , то, во-первых, в нем возможен только основной резонанс, и во-вторых, процессы, протекающие в параметрическом избирательном фильтре, физически эквивалентны процессам в системе, состоящей из бесконечного (счетного) числа независимых осцилляторов второго порядка.

Отмеченные особенности рассматриваемой колебательной системы позволяют произвести всестороннее и полное изучение описываемой (1) колебательной системы на устойчивость и обеспечить реализацию режима вынужденного резонанса на основе рассмотрения диаграмм устойчивости.

Следуя процедуре, изложенной в работе [1], составим приведенную систему обычно-

ванных дифференциальных уравнений, порожденную ДРУ НТ (1).

$$\dot{\mathbf{Q}}(\theta) = -\frac{1}{\alpha^3 - p^{-1}} \tilde{\mathbf{B}}(\theta, p) \mathbf{Q}(\theta), \quad (16)$$

где (17, 18, 19).

В силу зависимости матрицы коэффициентов приведенной порожденной системы от искомого мультипликатора  $p$  процедура численного построения диаграммы устойчивости имеет свои особенности.

На границе зоны динамической неустойчивости (при  $\alpha > 1$ ) один из мультипликаторов по модулю равен единице. Поскольку, как отмечалось выше, в устройстве возможен только основной резонанс, то упомянутый мультипликатор вещественен и может принимать значение либо +1, либо -1.

Если мультипликатор на границе зоны динамической неустойчивости заранее определен, то, подставив его значение в приведенную порожденную систему, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, матрица коэффициентов которой формально не зависит от искомого мультипликатора, и потому к такой системе обыкновенных дифференциальных уравнений применима стандартная методика вычисления мультипликаторов решений Флоке.

Если воспользоваться упомянутой стандартной методикой, то придем к требуемому результату, но только в том случае, если осуществляется поиск мультипликатора, значение которого равно величине, подставленной ранее в приведенную порожденную систему. Итак, для построения границ зон динамической неустойчивости необходимо априорное знание величины мультипликатора на искомой границе. Получение этой информации составляет содержание первого шага в процедуре построения границ зоны динамической неустойчивости.

Известно, что зона динамической неустойчивости «вложена» в область, ограниченную так называемыми линиями кратности. Каждая указанная область ограничивается двумя линиями кратности, которые пересекаются между собой. При этом, если исследуемая система устойчива в стационарном состоянии

для любого  $\delta > 0$ , то точка пересечения лежит на оси абсцисс диаграммы устойчивости. На линии кратности искомым мультипликатор — кратный корень характеристического уравнения (при  $\alpha > 1$  — двукратный), а в случае основного резонанса он вещественен и знак мультипликатора на линии кратности и на границе зоны динамической неустойчивости одинаков. Таким образом, в случае основного резонанса, когда необходимо определить лишь знак мультипликатора на границе зоны динамической неустойчивости, достаточно:

- рассмотреть стационарную систему, соответствующую изучаемой;
- построить для нее характеристическое уравнение;
- найти решения характеристического уравнения ( $\delta = \delta_i^* > 0$ ), для которых мультипликатор — корень характеристического уравнения — двукратен и определить для этих значений  $\delta = \delta_i^*$  знак мультипликатора.

Напомним, что если  $F(p, \delta)$  — характеристическая функция, то двукратный корень характеристического уравнения определяется как решение системы

$$\begin{aligned} F(p, \delta) &= 0, \\ \frac{\partial F(p, \delta)}{\partial p} &= 0. \end{aligned}$$

Точки  $\delta = \delta_i^*$  на оси абсцисс диаграммы устойчивости, в которых корень характеристического уравнения двукратен, позволяют не только определить знак мультипликатора на границе зоны динамической неустойчивости, но, что не менее важно, позволяют также «обозначить» область (по  $\delta$ ), в которой следует выполнять численный поиск границ зон динамической неустойчивости.

Наконец, следует отметить одно важное обстоятельство. Если суммарные потери в стационарной приведенной порожденной системе положить равными нулю, то границы зон динамической неустойчивости совпадут с линиями кратности, точки пересечения которых, как указано выше, расположены на оси абсцисс. Если учесть это обстоятельство, а также принять во внимание, что в знании точного расположения  $\delta_i^*$  на оси абсцисс нет

$$(\alpha^2 + p^{-1})b(\theta_n) \quad \alpha(\alpha + 1)b(\theta_n - \frac{2\pi}{3}) \quad (\alpha + 1)b(\theta_n - \frac{4\pi}{3}), \quad (17)$$

$$p^{-1}(\alpha + 1)b(\theta_n) \quad (\alpha^2 + p^{-1})b(\theta_n - \frac{2\pi}{3}) \quad \alpha(\alpha + 1)b(\theta_n - \frac{4\pi}{3}), \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\theta, p) = \begin{pmatrix} (\alpha^2 + p^{-1})b(\theta_n) & \alpha(\alpha + 1)b(\theta_n - \frac{2\pi}{3}) & (\alpha + 1)b(\theta_n - \frac{4\pi}{3}) \\ p^{-1}(\alpha + 1)b(\theta_n) & (\alpha^2 + p^{-1})b(\theta_n - \frac{2\pi}{3}) & \alpha(\alpha + 1)b(\theta_n - \frac{4\pi}{3}) \\ p^{-1}\alpha(\alpha + 1)b(\theta_n) & p^{-1}(\alpha + 1)b(\theta_n - \frac{2\pi}{3}) & (\alpha^2 + p^{-1})b(\theta_n - \frac{4\pi}{3}) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$20mm \frac{\sinh \beta \tau}{\sin \gamma \tau} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{(1 + \tan^2 \frac{\gamma \tau}{2} \times \tanh^2 \frac{\beta \tau}{2}) \cosh^2 \frac{\beta \tau}{2}}{\tan \frac{\gamma \tau}{2}} - \frac{\beta \tau}{\gamma \tau}, \quad (20)$$

$$35mm \delta \tau = \frac{[(\gamma \tau)^2 + (\beta \tau)^2] \tan \frac{\gamma \tau}{2}}{\gamma \tau (1 + \tan^2 \frac{\gamma \tau}{2} \times \tanh^2 \frac{\beta \tau}{2}) \cosh^2 \frac{\beta \tau}{2}}, \quad (21)$$

необходимости, а величина  $\delta_i^*$  зачастую слабо зависит от величины суммарных потерь в системе, которые к тому же обычно невелики, то можно существенно упростить процедуру определения знака мультипликатора на границе зоны динамической неустойчивости. Сущность упрощения состоит в следующем.

Исследуемой приведенной порожденной системе сопоставляется соответствующая ей стационарная каноническая система ( $\alpha = 1$ ) обыкновенных дифференциальных уравнений. Для нее составляется характеристическое уравнение и осуществляется поиск точек кратности  $\delta = \delta_{i,0}^*$  на оси абсцисс диаграммы устойчивости поочередно для  $p = 1$  и  $p = -1$ . Воспользуемся этими соображениями.

В [1] было получено характеристическое уравнение, которое перепишем так (20, 21), где  $s = -\beta + j\gamma$  — характеристический показатель,  $p = \exp sT$  — мультипликатор.

Для каждого фиксированного  $\alpha$  и  $\tau$  существует счетное множество точек  $\delta_k^*$ , в которых одна из множества пар корней характе-

ристического уравнения превращается в двукратный вещественный корень. Эти значения  $\delta_k^*$  соответствуют основному резонансу. Искомые корни характеристического уравнения  $\delta_k^*$  получим, положив  $\gamma_k T = k\pi$ . Поскольку  $\tau/T = 1/3$ , то  $\gamma_k \tau = k(\pi/3)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  Следуя соображениям, изложенным выше, положим  $\alpha = 1$ , тогда найдем, что (18) выполняется только при  $\beta \times \tau = 0$ . Для этого случая (19) можно переписать так:

$$\delta_k^* \tau = k \times \tan(\gamma_k \tau / 2) = k\pi/3 \times \tan(k\pi/6). \quad (22)$$

Поскольку  $0 < \delta_k^* < \infty$ , то решения (20) таковы:

$$\begin{aligned} 40mmk &= 1\delta_1^* \tau = 0,6 \quad p = -1, \\ 40mmk &= 1\delta_2^* \tau = 3,6 \quad p = 1, \\ 40mmk &= 1\delta_7^* \tau = 4,2 \quad p = -1, \\ 40mmk &= 1\delta_8^* \tau = 14,5 \quad p = 1. \end{aligned}$$

Решения (20), соответствующие  $k = 1$  и  $k = 7$ , дают антипериодические решения, а решения, соответствующие  $k = 2$  и  $k = 8$ , — пери-

одические решения. Таким образом, применительно к (1) для периодических решений имеем  $\delta_2^* = 1,72$  и  $\delta_8^* = 6,9$ .

Построение диаграммы устойчивости позволяет произвести выбор режима параметрического резонанса, обеспечивающего селекцию сигнала заданной формы. При этом на границе зоны динамической неустойчивости предварительно отмечается точка, соответствующая режиму, при котором одно из собственных колебаний ЛПКС — периодическое, совпадающее по форме с сигналом, селекцию которого должна быть осуществлена. После этого фактический режим («настройка») ЛПКС, обеспечивающий селекцию требуемого по форме сигнала, выбирается в зоне динамической устойчивости. При выборе «настройки» используются соображения, изложенные в работе [1]. ■

## Литература

1. Германович О. П., Кацан И. Ф. Линейные периодические разностные и дифференциально-разностные уравнения нейтрального типа и их приложения. СПб.: Изд-во СЗТУ, 2007.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1979.
3. Воеводин В. В. Математические вопросы параллельных вычислений. М.: Изд-во Московского университета, 1991.