

АЦП последовательного приближения с алгоритмом измерения Sub-2 radix

Владимир АНУФРИЕВ
anufriev.vladimir@ic-design.ru
Михаил ПЯТТОВЕВ

Настоящая статья посвящена сравнению характеристик аналого-цифровых преобразователей (АЦП) последовательного приближения с двоичным алгоритмом измерения и с алгоритмом Sub-2 radix.

Введение

Sub-2 radix — система счисления с основанием меньше 2. Алгоритмическая теория измерения как наука зародилась в начале нашей эры в Индии и Древнем Вавилоне. В то же время принято считать первым (из дошедших до нас) научным трудом книгу «Liber Abaci» Леонардо Пизано Фибоначчи (1202). В одной из глав описана задача о выборе наилучшей системы гирь. Ее суть состоит в выборе оптимального набора гирь для взвешивания на рычажных весах. В случае, когда гири разрешается класть только на правую, то есть свободную от груза чашу весов, решение задачи известно. Оптимальным решением является двоичная система гирь $[1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}]$, которая порождает двоичную систему счисления, лежащую в основе современных компьютеров.

В двоичной системе измерения искомым вес N , выраженный в единицах младшей гири, определяется выражением:

$$N = \sum_{i=1}^n a_i 2^{i-1}; \quad (1)$$

сумма всех предыдущих членов меньше последующего члена и равна

$$S_{n-1} = a_n \times (1 - 1/2^n). \quad (2)$$

Задача о выборе наилучшей системы гирь

Интерес к задаче о гирях возник в современной науке в связи с решением теоретических задач новой области техники — техники аналого-цифрового преобразования. Решению этой задачи, а также аналогичных задач посвящена теоретическая работа [1], в которой описан «принцип асимметрии измерения».

Суть этого принципа вытекает из внимательного рассмотрения процедуры (алгоритма) взвешивания неизвестного груза Q с помощью системы «двоичных гирь». На первом

шаге взвешивания весовщик кладет старшую гирю 2^{n-1} на правую чашу весов. При этом после первого шага может возникнуть две ситуации: весы остаются в исходном состоянии (1); весы переходят в противоположное состояние (2). Однако в первом случае весовщик в дальнейшем должен выполнить одну операцию — добавить на правую чашу весов следующую по старшинству гирю 2^{n-2} ; во втором случае весовщик обязан снять гирю 2^{n-1} с правой чаши весов и после их возвращения в исходное состояние добавить туда следующую по старшинству гирю 2^{n-2} . Таким образом, в реальных измерениях весовщик должен учитывать инерционность рычажных весов, то есть дискретное время p ($p = 0, 1, 2, 3, \dots$), необходимое для возврата весов в исходное положение. Введение параметра p в задачу о гирях приводит к бесконечному количеству новых ее вариантов, решение которых и является основой теории измерения, названной алгоритмической теорией измерения.

Время установления схемы сравнения в общем случае (для линейной системы) определяется как:

$$t \geq \tau \times \ln(1/\delta). \quad (3)$$

Например, при заданной точности 16 дв. разрядов $\delta \approx 1,5E-5$ время установления будет определяться как $t \approx 11\tau$, если же задать точность установления схемы сравнения на уровне 1%, то $t \approx 4,6\tau$, то есть более чем в 2 раза быстрее.

При реализации современных АЦП приходится учитывать не только время установления схемы сравнения, но и начальную погрешность «гирь» каждого разряда сравнения. При этом в случае, допустим, исходной относительной погрешности $\pm 0,1\%$ ни при каком последующем уравнивании не удастся скомпенсировать пропуски кодов величиной менее этой погрешности. То есть невозможно получить точность выше 10 двоичных разрядов. Приходится прини-

мать специальные меры по уменьшению относительного разброса величин уравнивающих емкостей или резисторов.

Таким образом, существует ограничение по быстродействию и точности при изготовлении АЦП последовательного приближения, основанных на двоичной системе измерения.

В работе [1] и последующих публикациях на эту тему рассматривается вопрос применения систем счисления с основанием меньше 2, так называемых Sub-2 radix, при которых возникает избыточность в каждом такте измерения, позволяющая проводить компенсацию возникающей погрешности измерения.

Возможность такой компенсации является потому, что в отличие от двоичной системы счисления, где сумма всех предыдущих членов меньше последующего члена, можно выбрать такую последовательность, в которой это условие не выполняется, — например, сумма членов геометрической прогрессии с основанием $q < 2$ будет равна:

$$S_n = \sum_{i=1}^n (b_i(1-q^i)/(1-q)) > b_n = b_1 q^n,$$

при $q = 1,8$:

$$S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1/1-q) = 1,25,$$

то есть даже при отклонении величины b_n от номинального значения на $\pm 5\%$ сумма последующих позволяет скомпенсировать это отклонение.

Реализации схем с использованием алгоритма Sub-2 radix

Выполнение набора уравнивающих резисторов или конденсаторов в соответствии с геометрической прогрессией, допустим со знаменателем $q = 1,8$, образующим ряд чисел 1; 1,8; 3,24; 5,832; 10,4976... (ряд ненатуральных чисел), неудобно и нежелательно по следующим причинам:

Таблица. Р-числа Фибоначчи

p	0	1	2	3	4
φ_p	2	1,618	1,465	1,380	1,324
$F_p(n)$	$2 \times F_p(n-1)$	$F_p(n-1) + F_p(n-2)$	$F_p(n-1) + F_p(n-3)$	$F_p(n-1) + F_p(n-4)$	$F_p(n-1) + F_p(n-5)$
N_F	16	20	22	24	25

- а) невозможно выполнение топологии из однородных элементов;
- б) выполнение топологии уравнивающих элементов путем простого масштабирования приводит к дополнительной начальной погрешности из-за краевых эффектов;
- в) неудобно выполнять размещение разнокалиберных фрагментов.

В случае двоичной системы счисления уравнивающие элементы набираются из набора элементов минимального размера и их количество в каждом разряде будет равно 1, 2, 4, 8, 16, 32 и т. д.

Для реализации алгоритма Sub-2 radix желательно выбрать такую систему счисления, в которой последовательность членов образуется из последовательности натуральных чисел.

Одной из таких последовательностей является ряд Фибоначчи, в котором в пределе каждый последующий член можно определить как

$$F(n) = F(n-1) \times \varphi,$$

где $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618$ (основание «золотой» пропорции).

Существуют и так называемые p -числа Фибоначчи, где «золотые» p -сечения равны φ_p , а каждый последующий член определяется согласно таблице.

Количество требуемых разрядов N_F с основанием φ_p при требуемой точности в 16 дв. разрядов ($N_{дв}$) также указано в таблице. Это количество приблизительно определяется по формуле:

$$N_F \geq (2/\varphi_p) N_{дв}.$$

Из таблицы видно, что избыточность растет с увеличением p .

Для уменьшения избыточности разработчики современных АЦП последовательного приближения выбирают иные последовательности натуральных чисел — например, числа трибоначчи. Наименование этой последовательности представляет собой вариацию названия «числа Фибоначчи».

Последовательность целых чисел трибоначчи $\{tn\}$ задается с помощью рекуррентного соотношения $t_0 = 0, t_1 = 0, t_2 = 1, t_{n+3} = t_{n+2} + t_{n+1} + t_n$. Получается ряд натуральных чисел 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44... Основание асимптотической геометрической прогрессии в этом случае равно:

$$C = \frac{1}{3} \left[(19 + 3\sqrt{33})^{1/3} - 4(19 + 3\sqrt{33})^{-1/3} + 1 \right] = 1,839286755...$$

Выбор указанного ряда натуральных чисел приводит к тому, что избыточность не превышает 20% по количеству как уравнивающих элементов, так и коммутирующих ключей.

Типовая схема SAR АЦП с реализацией алгоритма Sub-2 radix

Типовая схема SAR АЦП с реализацией алгоритма Sub-2 radix (рисунок) показана на примере экспериментальной микросхемы 14-разрядного АЦП, разработанного и изготовленного в ЗАО «ПКК МИЛАНДР».

Экспериментальная микросхема представляет собой 8-канальный 14-разрядный АЦП с оригинальным последовательным интерфейсом. Микросхема содержит:

- источник опорного напряжения «BG Reference»;
- 8-канальный мультиплексор — «8:1»;
- основной ЦАП — main DAC;
- калибровочный ЦАП — calib DAC;
- вспомогательный ЦАП — sub DAC;
- блок регистров калибровочных констант — SCR;
- логический блок управления АЦП — SAR control logic;

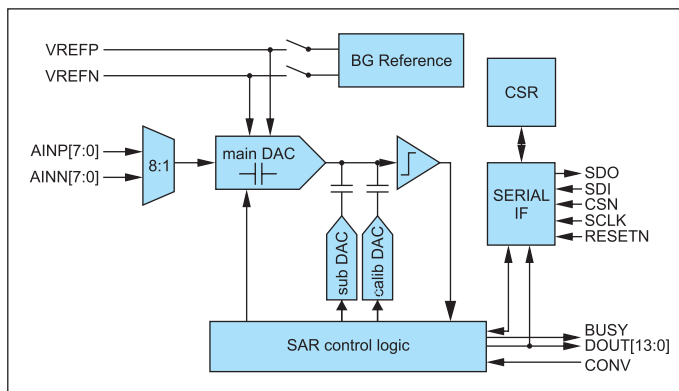


Рисунок. Типовая схема SAR АЦП с реализацией алгоритма Sub-2 radix

- узел последовательного интерфейса — serial IF. Архитектура АЦП позволяет:
- проводить калибровку с помощью встроенного алгоритма;
- калибровать «напряжение смещения», «ошибку усиления», «нелинейность весовых конденсаторов», «краевые эффекты» и прочие технологические факторы, вносящие ошибки рассогласования в матрицу конденсаторов;
- проводить калибровку с помощью внешнего устройства, реализующего тот или иной алгоритм калибровки.

Заключение

Применение системы счисления Sub-2 radix, основанной на натуральном ряде чисел трибоначчи

$$t_n = \sum_{i=1}^p t_{n-p}, \text{ при } p = 3,$$

для построения матрицы уравнивающих элементов в 14-разрядном АЦП последовательного приближения позволяет повысить быстродействие АЦП при той же или меньшей потребляемой мощности.

Архитектура матрицы уравнивающих конденсаторов АЦП, ее коммутация и алгоритм калибровки будут описаны во второй части данной статьи.

Продолжение следует

Литература

1. Стахов А. П. Роль «золотого сечения» и «математики гармонии» в преодолении «стратегических ошибок» в развитии математики. www.peacefromharmony.org
2. Groeneveld D. W. J., Schouweaars H. J., Senior Member, IEEE, Termeer H. A. H., Bastiaansen C. A. A. A Self-Calibration Technique for Monolithic High-Resolution D/A Converter. // IEEE JOURNAL OF SOLID-STATE CIRCUITS. December 1989. Vol. 24, N 6.
3. Числа Фибоначчи. wikipedia.org
4. Числа трибоначчи. wikipedia.org
5. Yun C. K. 20-Stage Pipelined ADC with Radix-Based Calibration. Тезисы доклада. Commencement June 2003 Oregon State University. Presented November 7, 2002.
6. Стахов А., Слученкова А., Щербаков И. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Издательство «Питер», 2006.
7. Стахов А. П. Еще раз о роли алгоритмической теории измерения, p -кодов Фибоначчи, закона Сороко, геометрии Боднара и других научных результатов в развитии «современной теории чисел Фибоначчи» (ответ Сергею Алферову). www.trinitas.ru
8. Lee H.-S., student member, IEEE, Hodges D. A., fellow IEEE, Gray P. R., fellow, IEEE. A Self-Calibration 15 Bit CMOS A/D Converter // IEEE JOURNAL OF SOLID-STATE CIRCUITS. December 1984. Vol. SC-19, N 6.