

«Профессор математики Wolfram Alpha» в интернет-облаке и в кармане пиджака

Владимир ДЬЯКОНОВ,
д. т. н., профессор
vpdyak@yandex.ru

Кто из ученых, инженеров, преподавателей и студентов не мечтал о смартфоне, имеющем хотя бы основные возможности мощной системы Mathematica от фирмы Wolfram Research? И вот мечта сбылась: математика в облаке реализована в программе Wolfram Alpha, бесплатная версия которой для смартфонов с операционной системой Windows 8 появилась в январе 2014 года. Теперь программа может быть установлена и в карманном устройстве.

История появления и развития Wolfram Alpha

Во время стажировки автора на фирме Wolfram (США) еще в 2000 году там шла интенсивная работа над созданием мощной системы компьютерной алгебры Mathematica 5. В последующие годы появились еще более совершенные версии 6, 7, 8 [1–4] и, наконец, — Mathematica 9. Эти программы получили мировую известность.

Но специалисты фирмы во главе с S. Wolfram в один голос говорили, что компания готовится к выпуску нескольких программных продуктов. Прошли годы, и стало ясно, что Wolfram задумал создать новый продукт — «живую» энциклопедию

по математике и многим другим областям науки и техники, размещенную в интернет-облаке. Вначале в Сети появились массивные справочные разделы по новым версиям Mathematica и всемирный «Интегратор», щелкающий сложные интегралы с помощью установленной на сервере фирмы системы Mathematica. Затем стала доступной Web Mathematica, в 2009 году вышла первая версия необычного программного продукта Wolfram Alpha (www.Wolfram Alpha.com), а потом и профессиональная версия Wolfram Alpha Pro. Была создана непрерывно пополняемая обширная база данных по многим отраслям науки, техники, музыки, административной и общественной жизни. И, прежде всего, по математике.

Wolfram Alpha на компьютере — небольшая программа, которая выдает ответы из этой базы знаний на любые сложные научные и математические запросы в режиме онлайн. И не только выдает готовые ответы, но и по требованию пользователя решает самые сложные математические задачи. Все, что теперь нужно, — просто набрать в строке ввода запрос в обычной словесной или математической форме. И с помощью мощнейших средств Wolfram Alpha начнет выполнять вычисления любой сложности, выдавать текст решения, строить графики функций и корней уравнений, формировать различные 2D- и 3D-фигуры, рисунки и фотографии. И это лишь малая часть того, что может делать Wolfram Alpha.

Тем временем интенсивно развивались карманные компьютеры и смартфоны на их основе. Например, приобретенный автором смартфон Nokia Lumia 1520 (рис. 1) имеет уже 4-ядерный процессор с рабочей частотой 2,2 ГГц, ОЗУ в 2 Гбайт, твердотельный

диск с емкостью 32 Гбайт (а с внешней флэш-памятью Micro SD еще до 64 Гбайт дополнительной памяти). А главное — устройство имеет огромный для смартфона цветной дисплей с диагональю 6 дюймов и разрешением 1920×1080 пикселей. И работает с Wi-Fi, 3D, 4D и прочими сотовыми сетями.

Фронтальная камера (есть еще и тыловая и 4 встроенных микрофона) с легендарной оптикой ZEISS делает 20-мегапиксельные фотоснимки и позволяет снимать кинофильмы превосходного качества со стереофоническим звуковым сопровождением. Мощный аккумулятор при полной зарядке позволяет неделю работать в режиме ожидания или сутки непрерывно наслаждаться музыкой или сидеть в Интернете целый день. И все это хозяйство весит 200 г и умещается в кармане пиджака.

Недалек день, когда на таких смартфонах появится полноценная автономная система компьютерной математики. Но облачная Wolfram Alpha уже проникла в смартфоны фирмы Apple с операционной системой iOS и Samsung с Android. А в январе 2014-го в магазине Nokia появилась бесплатная версия этой программы для смартфонов и планшетов с операционной системой Windows 8 для мобильных устройств под названием Math Keyboard for Wolfram Alpha. Многие думают, будто появился очередной калькулятор. А между тем приложение под этим не совсем точным названием обеспечивает полный доступ к мобильной и стандартной системам Wolfram Alpha.

Создатели Wolfram Alpha говорят, что в мобильных приложениях даже больше возможностей, чем в обычном веб-сервисе. В частности, программа умеет делать предположения, основываясь на данных о местопо-



Рис. 1. Смартфон Nokia Lumia 1520



Рис. 2. Окна приложения Math Keyboard for Wolfram Alpha

ложении пользователя. Работать с мобильным приложением Wolfram Alpha даже удобнее, нежели с веб-сервисом. Например, пользователь может заносить свои пометки во вкладки, просматривать список последних обращений к системе и выводить плитки с пометками прямо на рабочий стол. Свои запросы можно послать друзьям по электронной почте или поделиться ими в общественной сети.

Вам теперь ясно, что это приложение работает только при наличии интернет-соединения (Wi-Fi или в сети сотовой связи). Ни один калькулятор не способен заменить Wolfram Alpha с ее огромными базами данных — по математике, физике, астрономии, химии, биологии, медицине, истории, географии, политике, финансам, музыке, кинематографии, с информацией об известных людях, интернет-сайтах... А главное, с возможностью решать на мощнейших компьютерах практически любые серьезные математические задачи, с которыми пользователь может столкнуться на работе, в стенах школьных, университетских или институтовских лабораторий.

Начало работы

После включения смартфона на его экране появляется начальная часть основного окна (рис. 1) с множеством плиток, которые ассоциируются с загруженными приложениями (программами). Касаясь пальцем сенсорного экрана и передвигая плитки, можно просмотреть все окно. Впрочем, не будем описывать известные приемы работы со смартфоном. Отметим лишь, что сам пользователь создает набор плиток и тот обычно носит индивидуальный характер.

В центре экрана моего смартфона размещена большая плитка с жирным знаком равенства. Она и запускает приложение Math Keyboard for Wolfram Alpha, его можно найти в магазине Nokia в разделе для школьников и студентов и бесплатно загрузить. Коснувшись плитки этого приложения, откроем его окно (рис. 2а), состоящее из двух частей — левой части клавиатуры и краешка правой части. Сдвинув окно влево, увидим правую часть клавиатуры Math Keyboard (рис. 2б).

Впрочем, обозначения на клавишах очевидны и не требуют подробного описания. Следует лишь отметить, что, коснувшись строки ввода пальцем, можно активировать еще одну клавиатуру — на сей раз стандартную для смартфона (рис. 2в снизу). Введите, к примеру, $2+3$ и нажмите клавишу «=». Появится ответ: «5», под которым вы неожиданно обнаружите целую статью о числах — со словесным написанием числа, указанием его положения на числовой оси. Можете вводить и вычислять сложные математические выражения со скобками и функциями.

Система Wolfram Alpha обеспечивает диалог с пользователем на английском (пока) языке. Она прощает пользователю многочисленные неточности, которые недопустимы в большинстве систем компьютерной математики. Например, вы можете ввести число с точкой или запятой, отделяющей целую часть от дробной, пропустить у функции аргумент (он будет по умолчанию x), вместо квадратных скобок использовать круглые и даже допускать в вводимых словах орфографические ошибки. Интерпретатор Wolfram Alpha

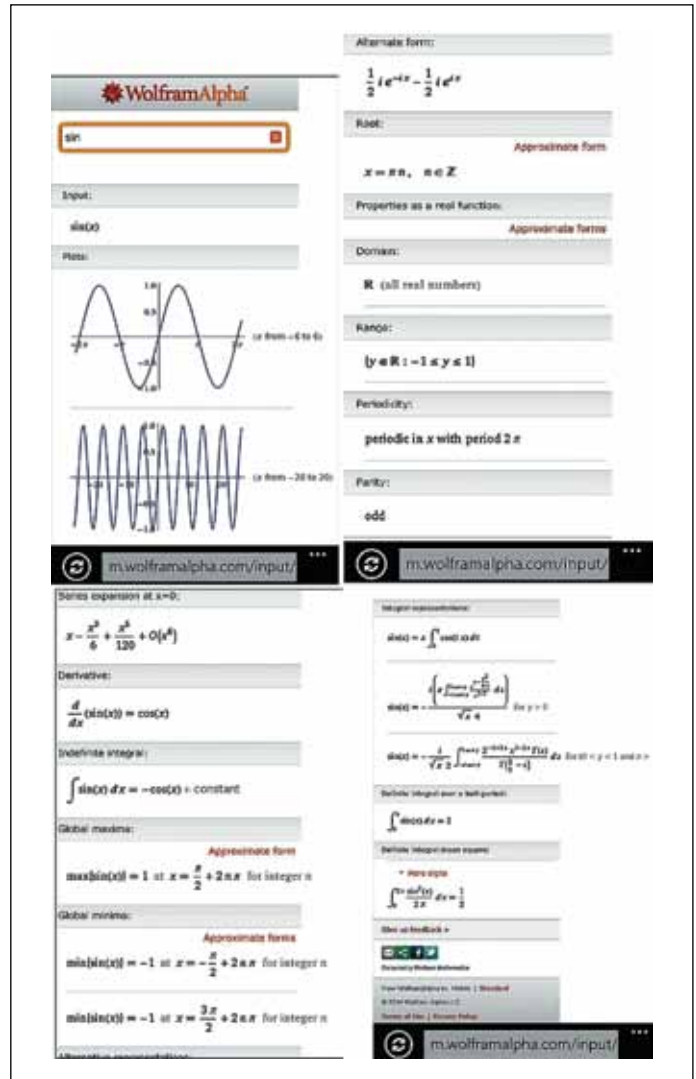


Рис. 3. Окна с данными функции sin

обычно исправляет такие погрешности и информирует, как именно он понимает вводимые слова и математические выражения. В случае когда интерпретация прошла неудачно, надо уточнить ввод.

Если вводимое слово или группа слов имеют общепринятый математический смысл, то Wolfram Alpha, как добросовестный профессор, не только сообщает пользователю этот смысл, но и дает исчерпывающую информацию об этом слове. Введите, скажем, просто слово sin (нажав соответствующую клавишу или побуквенно). Большинство математических систем ответит на такой ввод сообщением об ошибке — не указан аргумент (x) функции $\sin(x)$. Совсем иное дело система Wolfram Alpha — она выводит детальные данные об этой функции (рис. 3). Тут и графики функции синуса с разными масштабами, и области определения, и альтернативные выражения, и пример разложения функции в ряд Тейлора, и множество дифференциальных и интегральных представлений. Рискну предположить, что далеко не каждый выпускник технического университета знает такие подробности.

Вывод тематического каталога примеров

При таком обилии математических и иных данных система нуждается в огромной справке. Большие куски справки, в частности по системе Mathematica, уже размещаются в Интернете.

Между тем никаких признаков наличия в системе справочной базы данных нет. Как же с ней работать? А очень просто: введите в строку ввода слово help (помощь) или examples (примеры) или, наконец,



Рис. 4. Часть списка тематического каталога примеров

просто «?» (вопросительный знак). В ответ получите длинный список примеров применения системы в виде тематического каталога. Лишь первый экран этого списка показан на рис. 4.

Как разобраться с функциями системы

Wolfram Alpha неплохо разбирается с сотнями различных функций. Имена некоторых, самых распространенных, нанесены на клавиши клавиатуры этой системы. Так, функции `minimize` и `maximize` находят минимум и максимум выражения, набранного в строке ввода после них, строят графики выражения и помечают красной точкой минимум или максимум (пример на рис. 5а).

Если нужно указать, что какой-то параметр (например, пределы интегрирования в определенном интеграле) меняется от значения a до b , запишите так: `from a to b`. Восклицательный знак — это знак факториала, например `3!=1*2*3=6`. В математических выражениях пробел (клавиша `space`) обозначает умножение, например `2 3` и `2*3` даст число 6. Введите знаки интеграла или дифференциала и Wolfram Alpha добросовестно выдаст обзорные материалы по ним.

Графика Wolfram Alpha

Как мы убедились, программа Wolfram Alpha часто сопровождает вычисления довольно четкими графиками, даже без нашего запроса. Но, разумеется, можно задать построение графиков и вполне целенаправленно (рис. 6а). К примеру, задать ограничения на параметры функции знаками неравенств

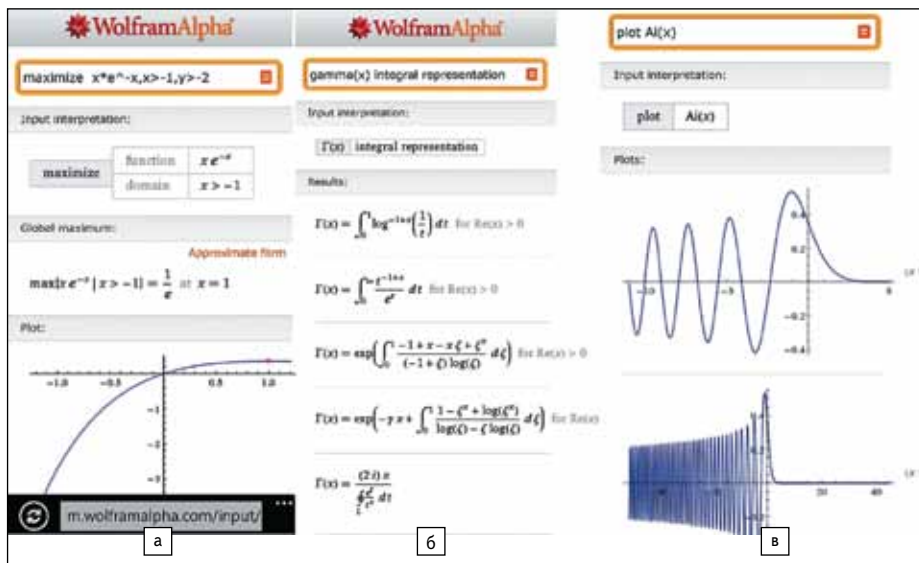


Рис. 5. Окна с примерами:

а) на функцию `maximize`; б) интегральное представление гамма-функции; в) построение графика функции Airy

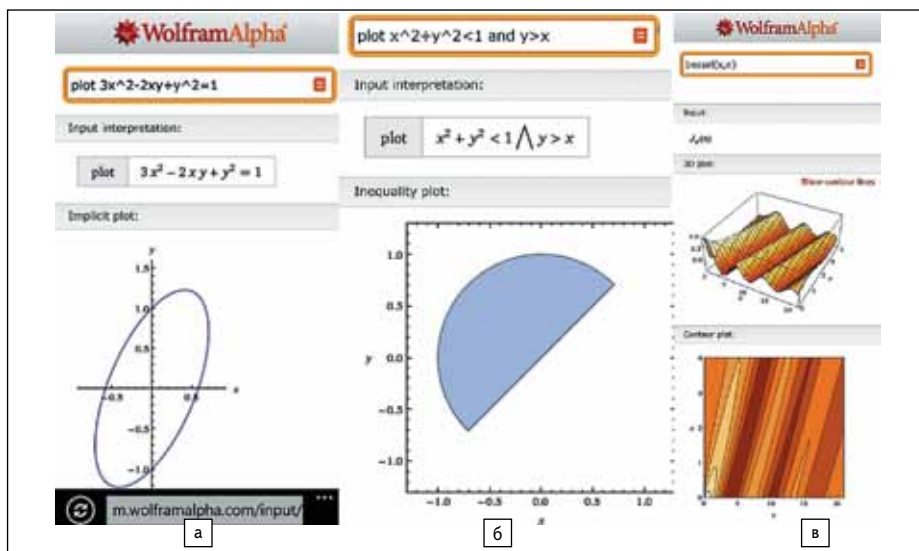
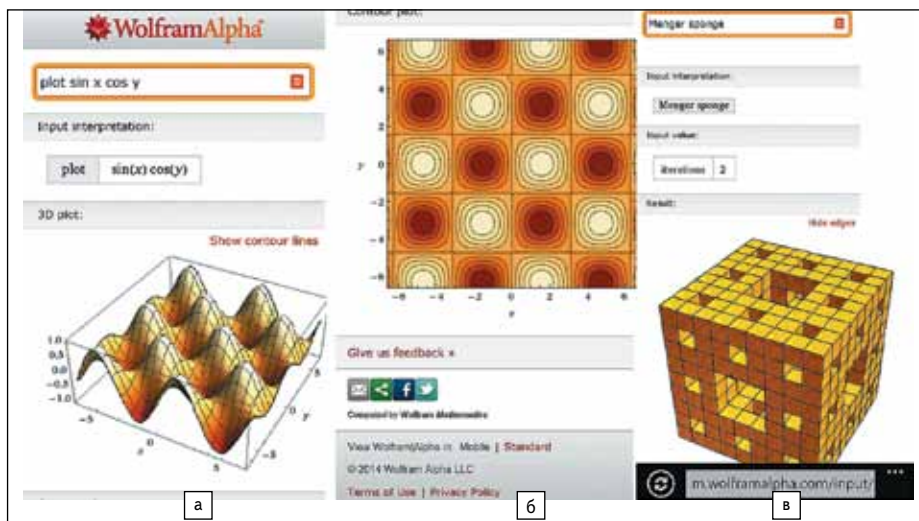


Рис. 6. Построение графика: а) эллипса; б) функции с ограничениями; в) функции Бесселя

Рис. 7. Построение: а) графика функции $\sin(x)\cos(y)$; б) графика двух аргументов; в) фигуры Menger sponge

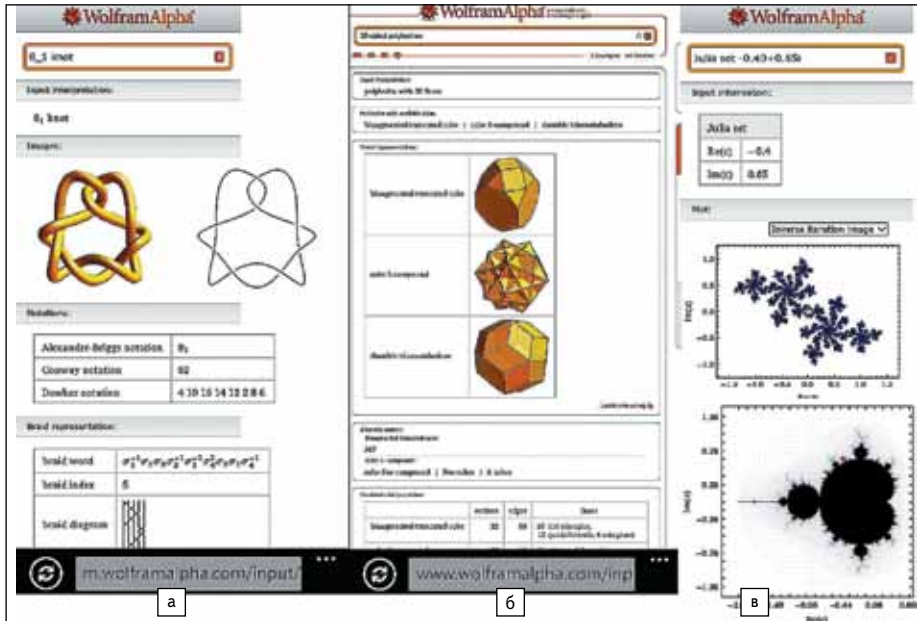


Рис. 8. Графики объемных фигур: а) узла; б) полиэдров; в) фракталов Julia и Mandelbrot

или ввести логические условия. Они будут учтены (рис. 6б). Программа распознает по имени и специальные математические функции, в том числе широко распространенные в радиоэлектронике функции Бесселя (рис. 6в).

Можно вывести и 3D-графики функций двух переменных (рис. 7а), контурные графики линий равного уровня (рис. 7б) и графики специальных фигур, например, фрактальных (рис. 7в). Сведущий в математике пользователь сразу подметит, что это графики системы Mathematica.

Приведем еще несколько примеров таких графиков, показанных на рис. 8. Графики отличаются высокой четкостью и легко масштабируются двумя пальцами при касании экрана и сближении и раздвижении их. Никакой настройки цветовой гаммы они не требуют.

Математический анализ в системе Wolfram Alpha

Продолжим оценивать математические возможности Wolfram Alpha. Зададим в самом общем виде простую степенную функцию x^y . Казалось бы, ничего, кроме названия, Wolfram Alpha нам не даст. Но наш «профессор в кармане» выдает целых два экрана сведений о функции (рис. 9а). Она представлена в комплексной форме, построены ее трехмерный и контурный графики. Отмечается даже такая «мелочь», как реальное значение корня, область существования, наличие периодичности и, наконец, дифференциальное и интегральное представления.

Тем, кто пользуется системами символьной математики, хорошо знакома символьная функция упрощения `simplify`. Она особенно эффективна при работе со сложными алгебраическими выражениями. Но Wolfram Alpha неплохо справляется и с тригонометрическими выражениями. Так, функцию тангенса он представляет через более простые функции и строит график этой функции (рис. 9в).

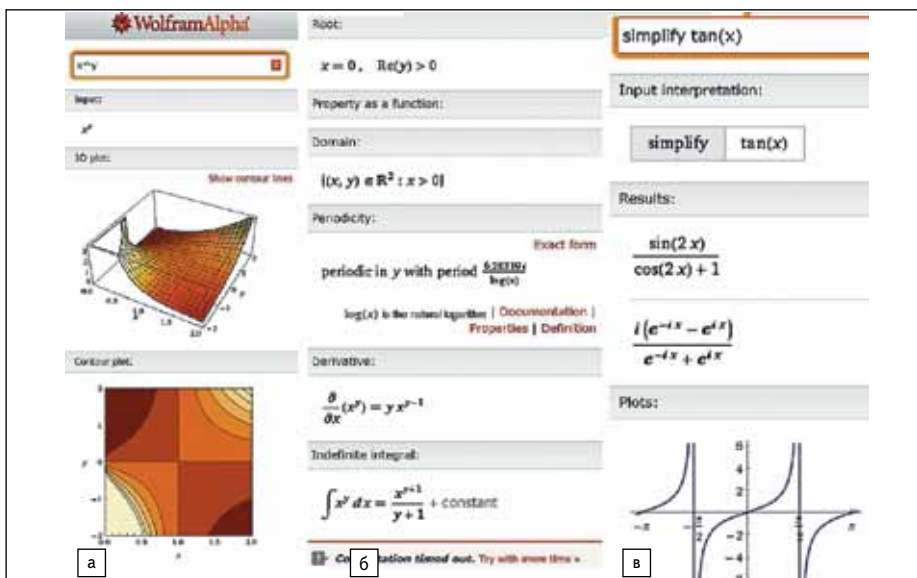


Рис. 9. Свойства: а, б) степенной функции; в) функции тангенса

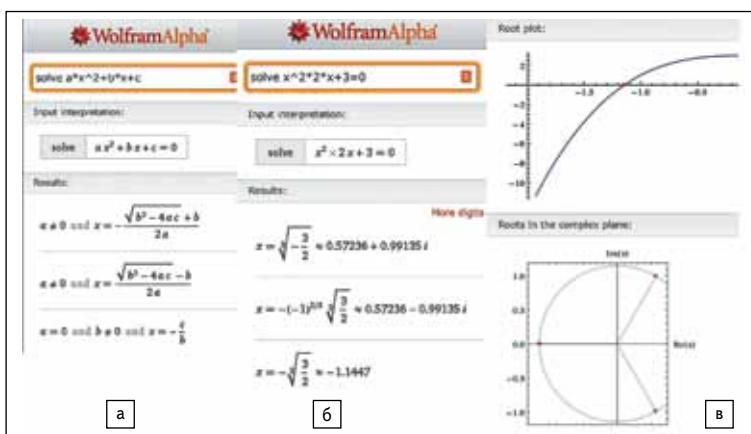


Рис. 10. Примеры решения квадратного уравнения: а) в символьном виде; б) в численном виде; в) построение графиков с корнями уравнения

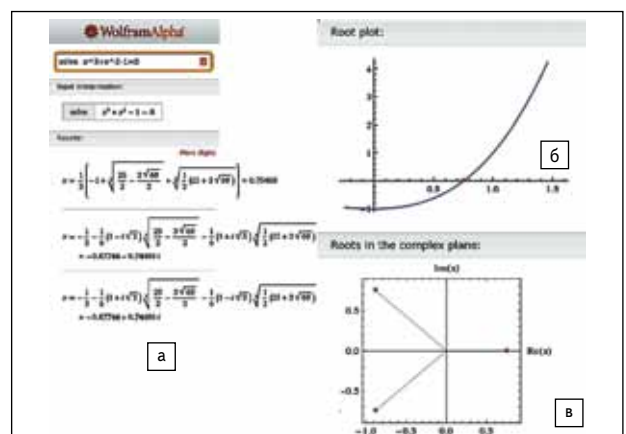


Рис. 11. Пример решения кубического уравнения (а, б) с графическим представлением корней (в)

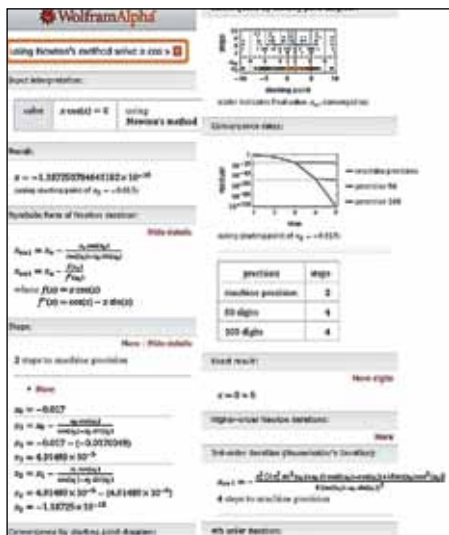


Рис. 12. Иллюстрация численного метода Ньютона

Квадратные уравнения находят широчайшее применение в технике математических вычислений. Как видно из рис. 10, в Wolfram Alpha для их решения можно использовать функцию solve, записав уравнение (или только его левую часть при нулевой правой части). Уравнения могут задаваться в символьном (рис. 10а) или численном (рис. 10б) виде, соответствующий характер имеет и решение. При численном задании уравнения строится график левой части и указывается положение корней на комплексной плоскости (рис. 10в).

Символьное решение кубического уравнения в общем виде чрезвычайно громоздко и на маленьком экране смартфона его не разглядишь. Да и пользы от его многостраничной формулы очень мало. На рис. 11 показан пример решения кубического уравнения частного вида в численном виде и представления его корней на комплексной плоскости.

Для численного решения нелинейных уравнений, которые обычно не имеют аналитического решения, часто используются методы Ньютона различного порядка. Забыли, что это такое? Wolfram Alpha напомнит об этом примером (рис. 12) для поиска корня уравнения $x \cos(x) = 0$. Тут программа выдает четыре экрана с текстами, графиками и математическими формулами. При желании нетрудно разобраться в сущности метода, его графической визуализации и формулах реализации метода Ньютона первого и более высокого порядка. Некоторые разделы описания метода даны в краткой форме. Для получения полной информации в соответствующем разделе активируйте гиперссылку More (более). Кстати, не забывайте о возможности пальцами изменять масштаб изображения! Пожалуй, редко какой обычный профессор столь подробно рассказывает о математических методах, как система Wolfram Alpha.

С легкостью вычисляет Wolfram Alpha символьные и числовые значения производных, неопределенных и определенных инте-

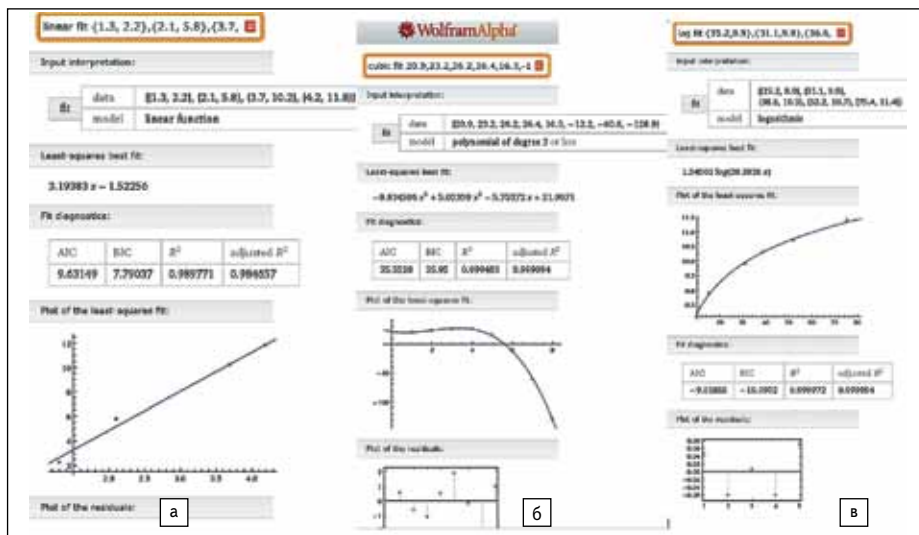


Рис. 13. Логарифмическая регрессия: а) линейная; б) полиномиальная; в) нелинейная

гралов пределов. Множество таких примеров уже приводилось на листах решений.

Линейная, полиномиальная и нелинейная регрессия

В практике научных вычислений важное место занимает обработка данных эксперимента. Особенно часто используется регрессия, которая позволяет в облаке точек эксперимента построить прямую или более сложную линию, удовлетворяющую критерию метода наименьших квадратов. При этом сумма квадратов отклонений точек от искомой линии должна быть минимальной.

Wolfram Alpha прекрасно справляется со всеми основными видами регрессии (примеры на рис. 13). На рис. 13а показана линейная регрессия, которая выполняется после указания linear fit с матрицей координат исходных точек. Программа выдает уравнение прямой и ее график с облаком исходных точек.

Линейная регрессия является частным случаем полиномиальной регрессии при степени полинома 1. На рис. 13б показана полиномиальная (кубическая) регрессия со степенью полинома 3. Здесь заданы только ординаты точек, и программа использует равностоящие абсциссы 0, 1, 2, ... и т. д. Число точек должно превышать $n+1$, где n — степень полинома. Если число точек равно $n+1$, то выполняется аппроксимация данных. Она отличается от регрессии тем, что исходные точки точно укладываются на линию полинома.

Особенно сложной является нелинейная регрессия, например экспоненциальная или логарифмическая. Совсем недавно она выполнялась далеко не всеми программами компьютерной математики. К Wolfram Alpha это не относится — она может выполнять нелинейную регрессию (рис. 13в). Разумеется, доступны и многие другие статистические расчеты.

Операции с матрицами и линейная алгебра

В практике многих расчетов важное значение имеют методы линейной алгебры, в частности матричные операции. Матрица обычно задается с помощью квадратных (а в программе Wolfram Alpha еще и в круглых) скобках. Некоторые примеры, как очевидные, уже приводились (рис. 13). Элементы векторов и матриц отделяются друг от друга запятыми, например (a, b, c) — вектор-строка из трех символьных элементов, $a((a, b), (c, d))$ — матрица из четырех символьных элементов размера 2×2 . На рис. 14а показаны возможные операции с этой символьной матрицей, а на рис. 14б тоже для численной матрицы с элементами — числами.

Конечно, этими функциями не ограничиваются возможности системы в линейной алгебре. Да и размер матрицы выбран малым только ради того, чтобы ее быстро ввести.

Звуковые сигналы и фильтры

Для проектирования фильтра высокого порядка на микросхемах, анализа и моделирования сложных электронных схем или расчета диаграммы направленности рупорной антенны Wolfram Alpha на смартфоне не предназначена. Тут уже нужна мощь и большие размеры экрана дисплея современного настольного компьютера, а подчас даже их не хватает. Но напомнить пользователю о форме и спектре сигнала, вычисленного с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ), система Wolfram Alpha может (рис. 15а), как и дать пример проектирования фильтра Чебышева или Бесселя невысокого порядка (рис. 15б).

Интересно, что при представлении формы звуковых сигналов (рис. 15а) предусмотрено их прослушивание — но только на ПК со стандартной звуковой картой. Таковой

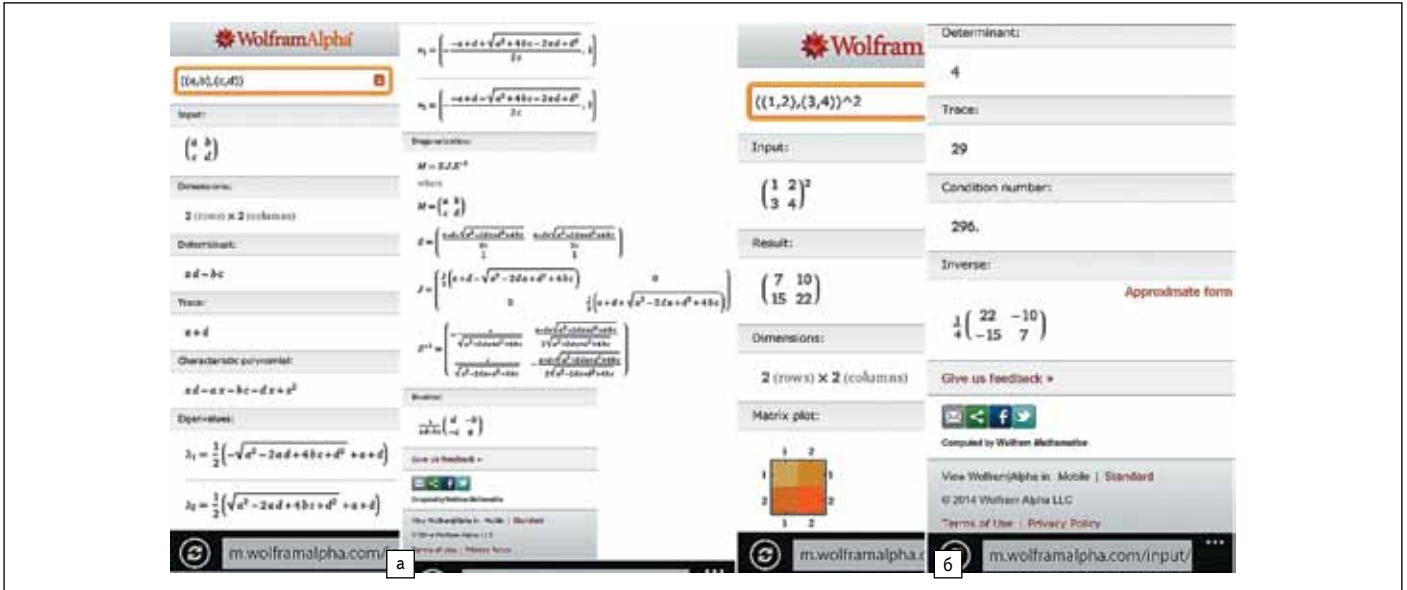


Рис. 14. Операции с матрицей: а) символьной; б) численной

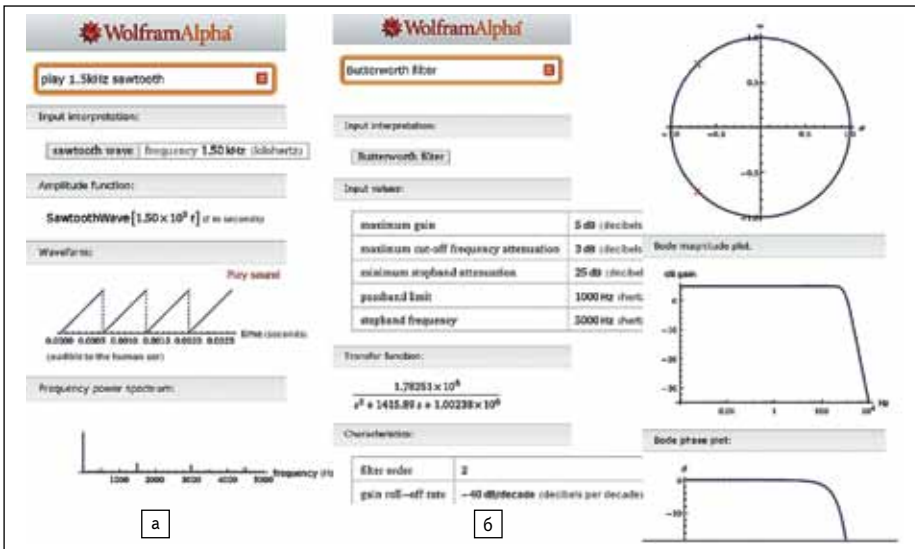


Рис. 15. График и спектр пилообразного звукового сигнала (а) и проектирование фильтра Бесселя 2-го порядка (б)

у смартфонов обычно нет, так что данная возможность не реализуется.

Решение линейных и нелинейных дифференциальных уравнений

В основе математического моделирования динамических процессов лежит решение описывающих их дифференциальных уравнений. И здесь возможности Wolfram Alpha поразительно разнообразны. Дифференциальные уравнения содержат члены с производными $dy(x)/dx$ первого и более высокого порядка. Wolfram Alpha допускает их упрощенный ввод, например, как y' для первой производной, y'' для второй производной и т. д. Впрочем, если дифференцирование происходит по другой переменной, в частности по времени t , то производные нужно записывать в полной форме — например, $y(t)$ для нулевой производной, $dy(t)/dt$ для первой производной и т. д.

На рис. 16 показаны примеры решения дифференциальных уравнений нелинейного первого порядка (рис. 16а и б) и линейного второго (рис. 16в) порядка. Представленные уравнения имеют аналитические решения, и для них строятся временные диаграммы решения и фазовые портреты.

Большинство нелинейных дифференциальных уравнений не имеет аналитического решения, и они решаются численными методами. На рис. 17 дан пример такого решения (рис. 17а) широко распространенным методом Рунге — Кутты — Фельберга с построением графика решения, приведем формулу реализации метода, оценкой зоны стабильности и сравнением различных методов решения (рис. 17б).

Очень распространены нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка, например уравнение Ван дер Поля, описы-

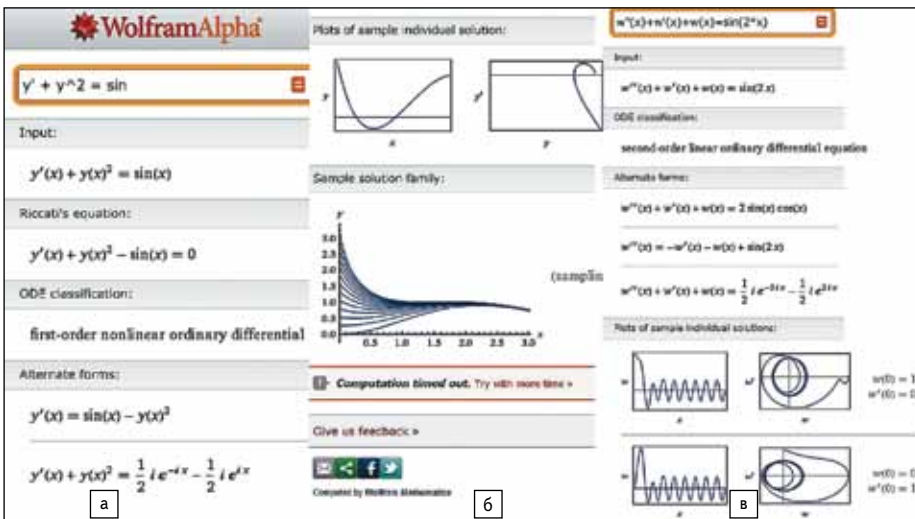


Рис. 16. Решение дифференциальных уравнений с построением временных диаграмм и фазовых портретов

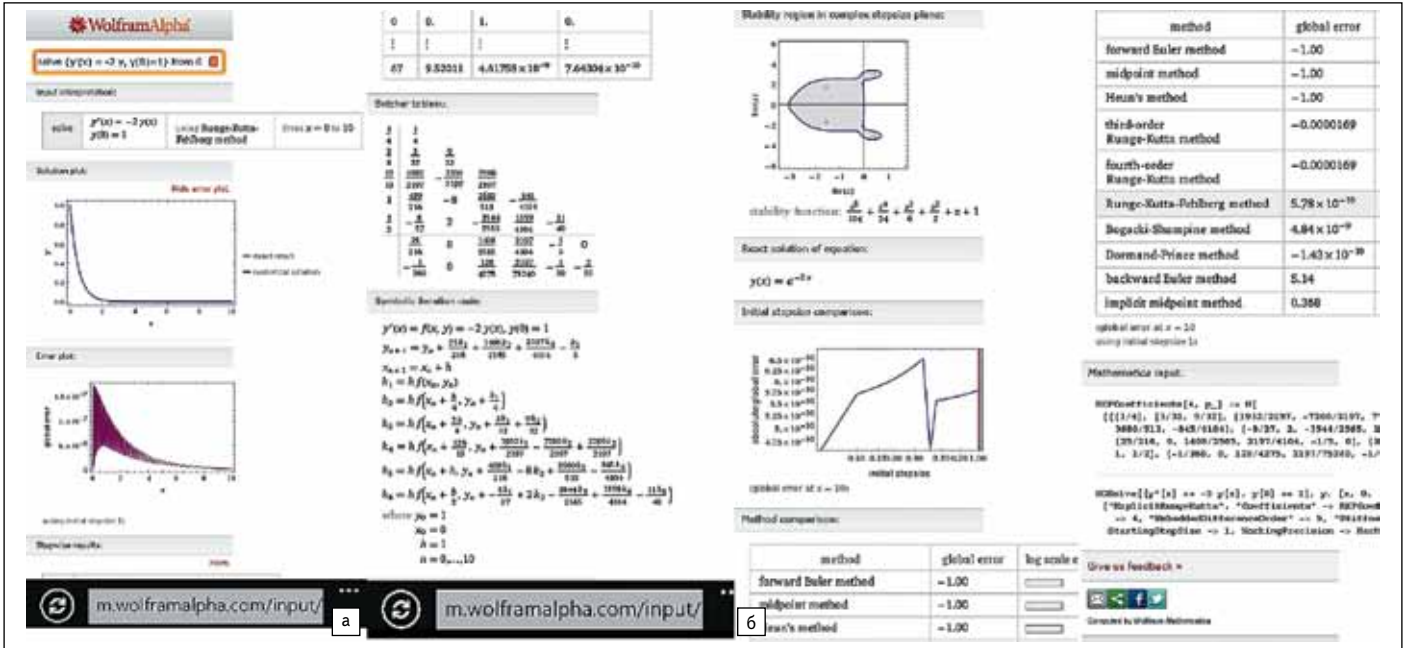


Рис. 17. Численное решение дифференциального уравнения с его подробным описанием

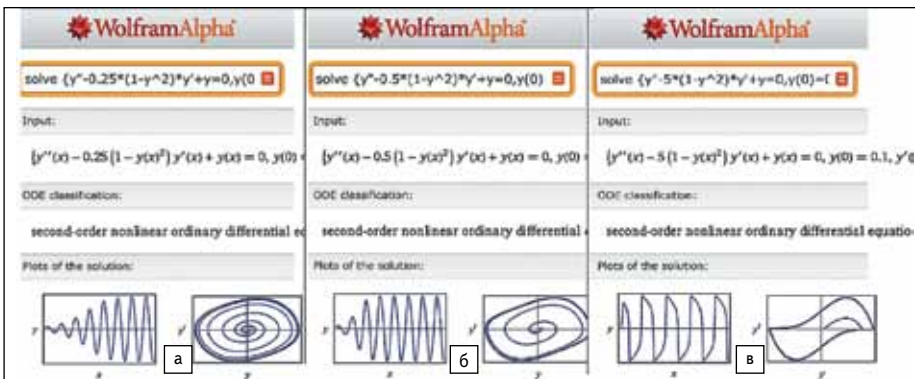


Рис. 18. Численное решение нелинейного дифференциального уравнения Ван дер Поля при трех значениях параметра нелинейности μ : а) 0,25; б) 0,5; в) 5

включающее процесс нарастания автоколебаний у LC-генератора на электронной лампе или транзисторе с квадратичной передаточной характеристикой. На рис. 18 даны три примера решения уравнения Ван дер Поля при трех значениях параметра μ , заданных числами перед открывающей круглой скобкой левой части уравнения. При больших μ дифференциальное уравнение становится жестким, что, впрочем, не мешает его решению.

Для каждого μ построены временные зависимости и фазовые портреты. Они хорошо выявляют характер решения и переход от режима генерации синусоидального сигнала при малых μ к генерации почти разрывного (релаксационного) сигнала при больших μ .

Преобразования Фурье и вейвлеты

Обработка сигналов также доступна системе Wolfram Alpha. Фундаментальное значение при этом играет прямое преобразование Фурье (Fourier transform), пример которого дан на рис. 19 в аналитическом виде. Оно преобразует временную зависимость сигнала в частотную в комплексной форме.

Новации в обработке сигналов — вейвлеты [5] — тоже не чужды Wolfram Alfa. Для этого надо зайти с запросом «wavelets» в Wolfram Alpha и активизировать гиперссылку More details («больше деталей»). Вы попадете в проект MathWorld (рис. 20а), где обнаружите массу примеров на применение вейвлетов и преобразований Фурье. Два примера вейвлетов приведены на рис. 20б и в.

Географические и другие данные

Wolfram Alpha позволяет получить основные данные о состоянии и развитии

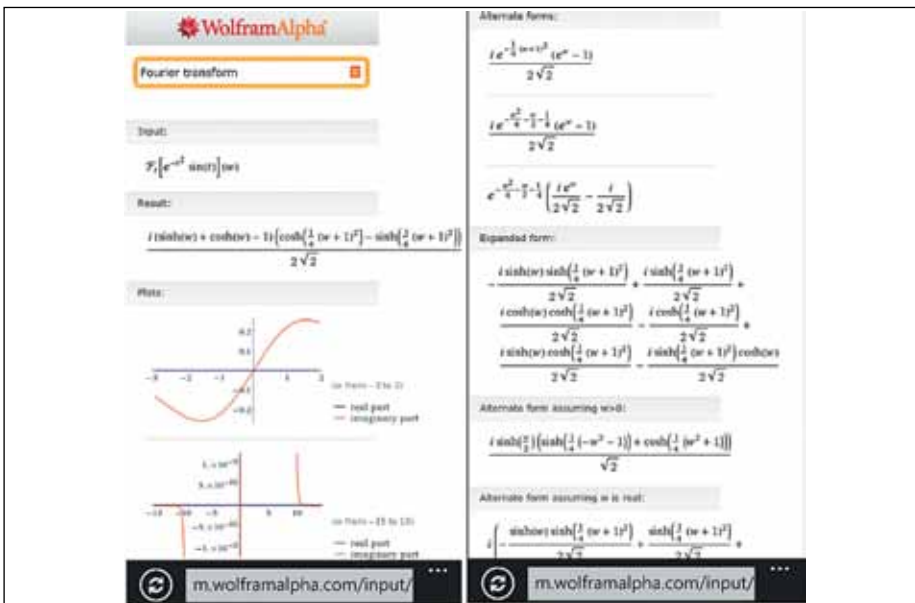


Рис. 19. Преобразование Фурье

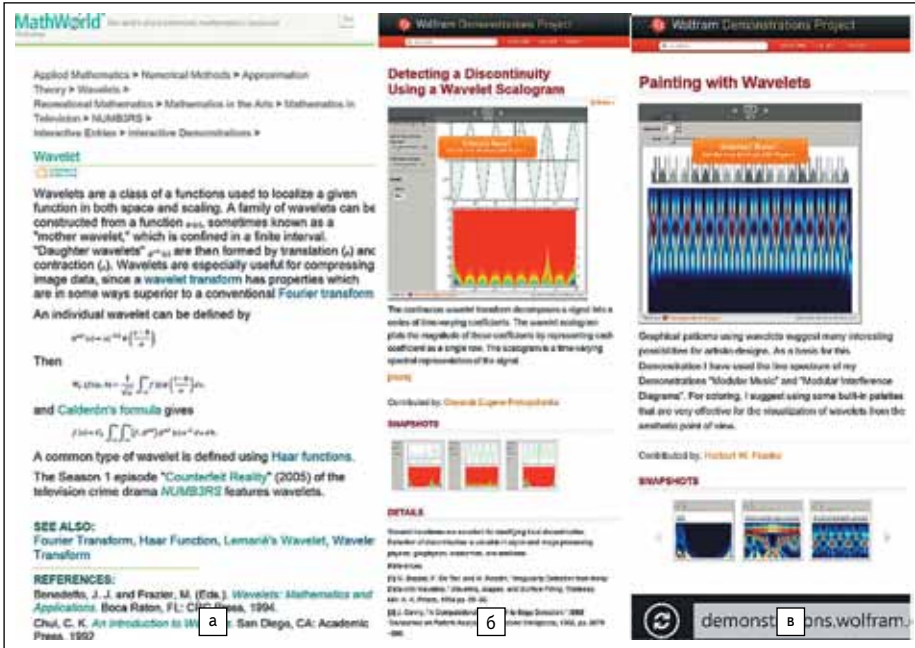


Рис. 20. Вейвлеты (а) и их применение для выявления разрыва синусоидального сигнала (б) и получения цветной скейлинграммы (в)



Рис. 22. Вывод меню операций сохранения листов Wolfram Alpha

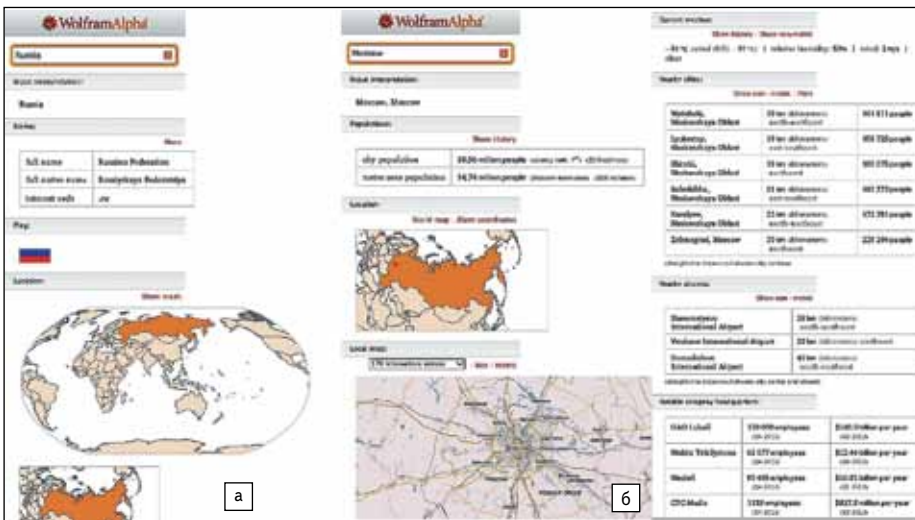


Рис. 21. Данные о Российской Федерации (а) и ее столице — г. Москве (б)

что вычисления произведены в системе Mathematica. Современные 8-я и 9-я версии этой системы содержат около 5000 функций, операторов и математических определений. Начавший работу с Wolfram Alpha пользователь, скорее всего, их просто не знает. Поэтому очень полезны книги и статьи по системе Mathematica, например [2–4].

Некоторые примеры в мобильной версии Wolfram Alpha не работают. В таком случае программа предлагает перейти на стандартную версию Wolfram Alpha, оптимизированную под ноутбуки и настольные компьютеры. Она тоже бесплатная и с некоторыми неудобствами (мелкий шрифт, малые размеры строки ввода и т. д.), но вполне работает на смартфонах с достаточно большим экраном. При желании смартфон можно повернуть на 90°. Разумеется, ничто не мешает пользователю работать с системой Wolfram Alpha и Wolfram Alpha Pro на ноутбуке, планшетном или настольном ПК. Не забывайте, что пока Wolfram Alpha Pro является коммерческим продуктом и за приобретенную программу надо платить.

Заключение

Сейчас фирма Wolfram Research отмечает 25-летие появления мощной системы компьютерной математики Mathematica. Она стала фундаментом для создания и развития целого ряда новых проектов — Wolfram Alpha, Wolfram Alpha Pro, MathWorld и других. По существу в Интернете сформирована облачная энциклопедия по математике и использующим ее наукам и областям техники, искусства и общественной жизни. В отличие от пресловутой анонимной «энциклопедии

самых различных областей науки и техники: географии, социально-экономическом и политическом положении различных стран и городов, о музыке, архитектуре и искусстве, об отдельных исторических личностях и т. д. Ограничимся приведением данных о Российской Федерации (рис. 21а) и столице нашего государства — городе Москве (рис. 21б).

Политические и административные данные часто меняются, и возможны ошибки в их представлении — даже довольно грубые.

Кое-что еще о Wolfram Alpha

Листы с запросами Wolfram Alpha можно сохранять в отдельной вкладке «Избранное» или на рабочем столе, либо отправить их

по электронной почте или в общественную сеть. Для этого нажмите на знак двоеточия в конце листа — появится меню этих операций, выберите нужную из них и укажите на нее касанием пальца (рис. 22).

Важно отметить, что сохраняются именно запросы с рисунком первого экрана ответа, а не куда более длинные полные ответы системы. После обращения к сохраненному запросу он тут же исполняется, разумеется, с обращением к интернет-сайту фирмы. Если пользователь захочет просматривать решения (ответы) где-то вдалеке от места постоянной работы, то ему потребуется подключение к Интернету через Wi-Fi или сеть сотовой связи.

Часто ответы на запросы математического характера завершаются сообщением о том,

дии» Wikipedia, продукты Wolfram Research отличаются высоким математическим уровнем проработки и готовятся не анонимными и ни за что не отвечающими «специалистами», а коллективом профессионалов — математиков и программистов.

Литература

1. Дьяконов В. П. Энциклопедия компьютерной алгебры. В 2 томах. М.: ДМК-Пресс, 2009.

2. Дьяконов В. П. Mathematica v.5.1/v.5.2/v.6 в математических и научно-технических расчетах. 2-е издание, дополненное и переработанное. М. Солон-Пресс, 2008.

3. Дьяконов В. П. Mathematica 5/6/7. Полный самоучитель. М.: ДМК-Пресс, 2012.

4. Дьяконов В. Задание, анализ и обработка сигналов в системе Mathematica 8 // Компоненты и технологии. 2012. № 8.

5. Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории к практике. 2-е издание, дополненное и переработанное. М. Солон-Р, 2004.