

Анатолий КОРШУНОВ  
a.i.korshunov@mail.ru

# Электронная модель индукционного датчика измерителя рассогласования следающей системы

## Введение

Следающие системы представляют собой один из самых распространенных типов систем автоматического управления. Их обычно используют для дистанционного управления углом поворота объекта управления.

Измеритель рассогласования является одним из важнейших функциональных элементов следающей системы. В аналоговых следающих системах используют измерители рассогласования на индукционных элементах — сельсинах, или вращающихся трансформаторах.

Принцип действия индукционного датчика основан на законе электромагнитной индукции [1]. Электрическая схема сельсина изображена на рис. 1.

Действующие значения ЭДС, наводимых в обмотке синхронизации (ОС) переменным потоком, созданным током, протекающим в обмотке возбуждения (ОВ), определяются выражениями:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_{н0} \cos \alpha; \\ E_2 &= E_{н0} \cos(\alpha - 2\pi/3); \\ E_3 &= E_{н0} \cos(\alpha - 4\pi/3) = \\ &= E_3 = E_{н0} \cos(\alpha + 2\pi/3), \end{aligned} \quad (1)$$

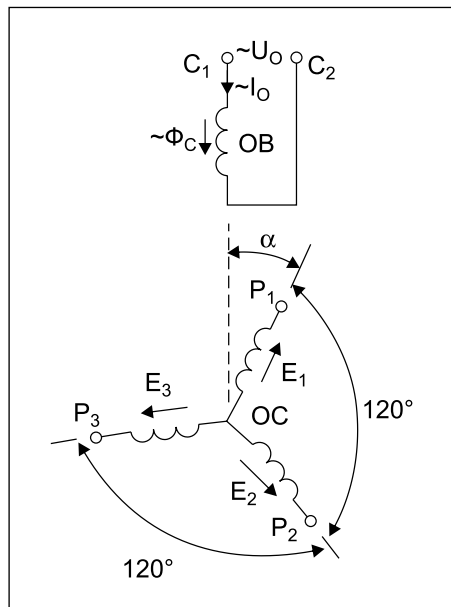


Рис. 1. Электрическая схема сельсина

где  $E_{н0}$  — наибольшая величина ЭДС, соответствующая совпадению осей фазной обмотки и обмотки возбуждения;  $\alpha$  — угол поворота ротора сельсина.

Мгновенные значения наводимых ЭДС можно записать в виде:

$$\begin{aligned} e_1 &= E_1 \sqrt{2} \sin \omega t; \\ e_2 &= E_2 \sqrt{2} \sin \omega t; \\ e_3 &= E_3 \sqrt{2} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (2)$$

Фаза ЭДС может иметь два значения:  $0^\circ$ , если ось обмотки составляет с осью обмотки возбуждения ОВ угол, меньший  $90^\circ$ , или  $180^\circ$  в противном случае.

Измеритель рассогласования состоит, как известно, из двух сельсин (или из двух вращающихся трансформаторов), соединенных между собой электрически и работающих в трансформаторном режиме. Ротор одного из индукционных приборов, называемого датчиком, например сельсина-датчика (СД), поворачивается на угол  $\theta_d$ , равный заданному углу поворота объекта управления  $\theta_{вх}$ . Угол поворота ротора  $\theta_n$  второго из индукционных приборов, называемого приемником, например сельсина-приемника (СП), равен действительному углу поворота объекта управления  $\theta_{вых}$ . На обмотку возбуждения прибора-датчика подается напряжение переменного тока постоянной величины  $U_r$ .

С обмотки возбуждения прибора-приемника снимают напряжение переменного тока, называемое напряжением рассогласования  $U_p$ . Его величина зависит от модуля синуса разности углов поворота роторов датчика  $\theta_d$  и приемника  $\theta_n$ , называемого рассогласованием  $\theta = \theta_d - \theta_n$ . Фаза напряжения рассогласования  $U_p$  относительно напряжения питания датчика  $U_0$  —  $0^\circ$  или  $180^\circ$  — зависит от знака рассогласования  $\theta$ . Таким образом, фазу напряжения рассогласования  $U_p$  можно учесть в знаке его величины, описав ее выражением  $U_p = U_m \sin \theta$ .

Для испытания аналоговых следающих систем традиционно использовали специальное устройство, называемое синусным механизмом. Это дорогое и громоздкое электро-механическое устройство, обеспечивающее подачу на вход следающей системы типовых тестовых воздействий: скачка, линейно-воз-

растающего и гармонического воздействия. Они обеспечивают оценку качества работы системы в переходных и установившихся режимах.

Линейно-возрастающее воздействие соответствует вращению ротора датчика с постоянной скоростью, а гармоническое — колебанию ротора около нулевого положения с постоянной амплитудой и частотой.

Более современным устройством для испытания следающих систем может быть электронная модель электро-механического синусного механизма, например электронная модель сельсина-датчика.

Электронная модель сельсина-датчика согласно формулам (1) и (2) должна генерировать систему трех напряжений переменного тока:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_m \cos \theta_d \times \cos \omega t; \\ U_2 &= U_m \cos(\theta_d - 2\pi/3) \times \cos \omega t; \\ U_3 &= U_m \cos(\theta_d - 4\pi/3) \times \cos \omega t, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\theta_d(t)$  — выбранный закон изменения задающего воздействия следающей системы,  $U_m = \sqrt{2} E_{н0} / 2$  при равенстве сопротивлений фазных обмоток сельсина-датчика и сельсина-приемника.

До начала разработки электронной модели сельсина-датчика необходимо было исследовать влияние замены датчика его электро-механической моделью, вырабатывающей систему трех напряжений переменного тока, модулированных по амплитуде (3), на основные свойства измерителя рассогласования.

Электро-механическая модель сельсина-датчика СД обведена на рис. 2 пунктиром.

Трансформаторы ТР1, ТР2, ТР3 служат для согласования напряжения питания сельсина с сетью 220 В, 50 Гц и для гальванической развязки.

Лабораторные автотрансформаторы ЛАТР 1–3 позволяют плавно регулировать напряжения  $U_1, U_2, U_3$ , подаваемые на обмотку синхронизации ОС сельсина-приемника (СП). Переключатели П1, П2, П3 необходимы для изменения фазы напряжений  $U_1, U_2, U_3$  на  $180^\circ$ .

Исследовали сельсин типа БС405 НА. Были сняты статические характеристики  $U_p = f(\theta)$  измерителя рассогласования на сельсинах

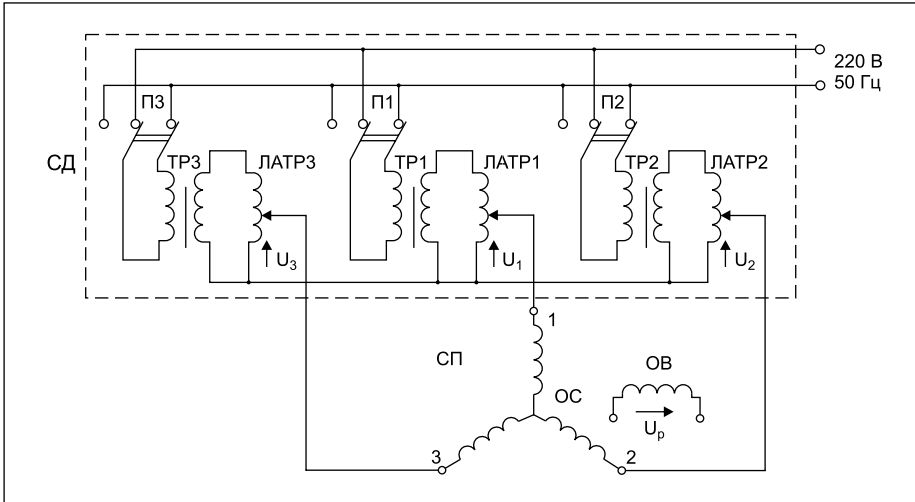


Рис. 2. Электрическая схема измерителя рассогласования с электромеханической моделью сельсина-датчика

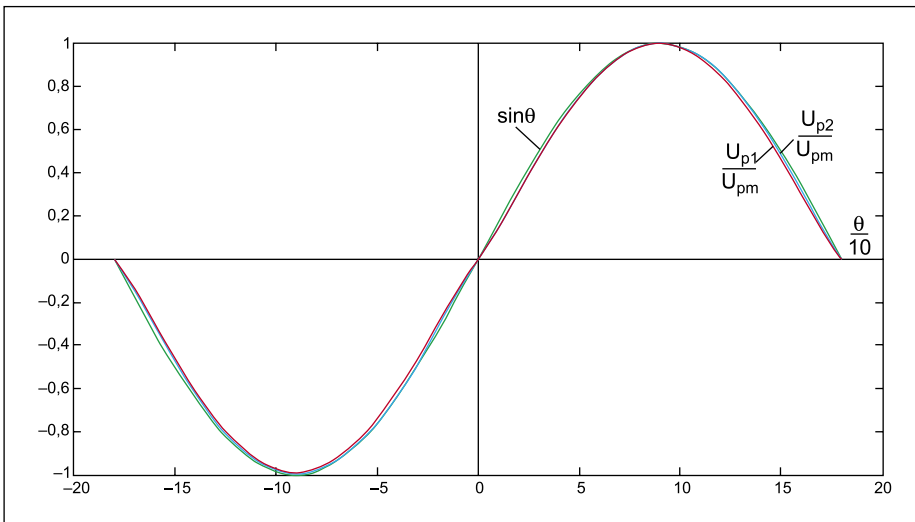


Рис. 3. Статические характеристики измерителей рассогласования

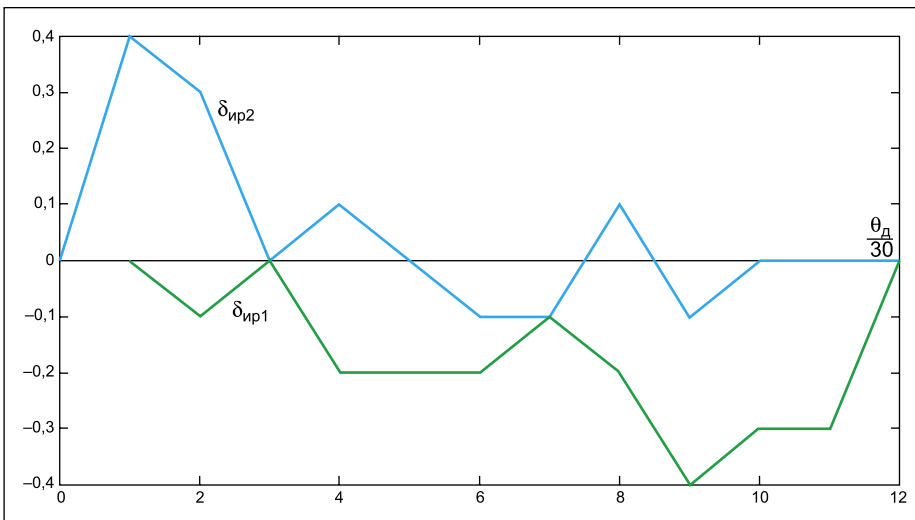


Рис. 4. Кривые ошибок измерителей рассогласования

БС405 НА и измерителя с электромеханической моделью сельсина-датчика, представленные на рис. 3 кривыми 1 и 2 соответственно.

Для сравнения точности измерителей рассогласования получены их кривые ошибок  $\delta_{ир} = f(\theta_d)$ , отмеченные соответственно циф-

рами 1 и 2 на рис. 4. Сравнение статических характеристик показывает их практическое совпадение. При сравнении кривых ошибок становится ясно, что измеритель рассогласования электромеханической моделью сельсина-датчика имеет точность не хуже, чем при использовании реального сельсина-датчика.

### Реализация электронной модели сельсина-датчика

Вычисления, необходимые для получения выходных напряжений электронной модели СД, удобнее реализовать в цифровом вычислительном устройстве (ЦВУ), например в микропроцессоре. Реальные напряжения  $U_1, U_2, U_3$  можно получить с помощью преобразователя код-напряжение (ПКН), а для согласования с нагрузкой можно использовать достаточно мощные операционные усилители.

Дискретные значения функции  $\cos\omega t$ :  $\cos(n2\pi/N)$ , где  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$  — число точек на периоде функции  $T = 2\pi/\omega$ , можно получать, решая в ЦВУ последовательным вычислением разностное уравнение 2-го порядка:

$$x_{n+2} - 2\cos(2\pi/N)x_{n+1} + x_n = 0 \quad (4)$$

при начальных условиях:

$$x_0 = 1, x_1 = \cos(2\pi/N). \quad (5)$$

Действительно, выполнив Z-преобразование в разностном уравнении с учетом  $Z\{x_n\} = X(z)$ ,  $Z\{x_{n+1}\} = zX(z) - x_0z$ ,  $Z\{x_{n+2}\} = z^2X(z) - x_0z^2 - x_1z$  получаем:

$$z^2X(z) - z^2 - z\cos(2\pi/N) - 2\cos(2\pi/N)[zX(z) - x_0z] + X(z) = 0,$$

где  $X(z) = Z\{x_n\}$  — Z-преобразование решетчатой функции  $x_n$ .

Выразив из последнего уравнения  $X(z)$ , получаем:

$$X(z) = \frac{z^2 - \cos(2\pi/N)z}{z^2 - 2\cos(2\pi/N)z + 1}. \quad (6)$$

Выполнив с помощью известных таблиц обратное Z-преобразование в выражении (6), получаем аналитическое решение разностного уравнения (4):  $x_n = \cos(n2\pi/N)$ .

Решение разностного уравнения последовательным вычислением осуществляется с помощью следующего из него рекуррентного выражения:

$$x_{n+2} = 2\cos(2\pi/N)x_{n+1} - x_n. \quad (7)$$

Подставляя начальные значения  $x_0 = 1, x_1 = \cos(2\pi/N)$ , находим:  $x_2 = 2\cos(2\pi/N)x_1 - x_0 = 2\cos(2\pi/N) \times \cos(2\pi/N) - 1 = 2\cos^2(2\pi/N) - 1 = \cos(4\pi/N)$ .

Продолжая вычисления, ЦВУ будет получать последовательные значения  $\cos(n2\pi/N)$ ,  $n = 3, 4, 5, \dots$

Значение задающего воздействия  $\theta_{\partial}(t)$ :  $\theta_{\partial}(nT/N)$  в случае изменения его по линейному закону  $\theta_{\partial}(t) = \Omega t$ , где  $\Omega$  — скорость вращения ротора СД, легко вычисляется по формуле:  $\theta' = \Omega nT/N$ . При больших значениях  $\theta_{\partial}(t)$  ( $|\theta_{\partial}(t)| > 2\pi$ ) следует отбрасывать целое число оборотов, то есть:

$$\theta_{\partial}(t) = \theta'_{\partial}(t) - 2\pi[\theta'_{\partial}/2\pi], \quad (8)$$

где  $[\theta'_{\partial}/2\pi]$  — целая часть числа  $\theta'_{\partial}/2\pi$ .

При гармоническом законе изменения заданного угла поворота:

$$\theta_{\partial}(t) = \theta_m \sin \Omega t \quad (9)$$

дискретные значения  $\theta_{\partial}(nT/N)$  можно вычислить аналогично значениям  $\cos(n2\pi/N)$  по рекуррентному выражению. Для этого необходимо определить значение отношения  $\omega/\Omega$  и округлить его до ближайшего целого числа  $M$ . Поскольку отношение  $\omega/\Omega = f/F$ , где  $f$  — частота питания сельсина (Гц), а  $F$  — частота гармонического воздействия (Гц), имеет порядок  $10^2$ – $10^3$ , то относительная ошибка округления незначительна.

Значения решетчатой функции:

$$y_n = \sin(\Omega n/TN) = \sin(\omega nT/MN) = \sin(n2\pi/MN)$$

при начальных значениях  $y_0 = 0$ ,  $y_1 = \sin(2\pi/MN)$  можно получить по рекуррентному выражению, аналогичному выражению (7):

$$y_{n+2} = 2\cos(2\pi/MN)y_{n+1} - y_n \quad (10)$$

Последовательным вычислением получаем для  $n = 2, 3, \dots$ :

$$y_2 = 2\cos(2\pi/MN)y_1 - y_0 = 2\cos(2\pi/MN) \times \sin(2\pi/MN) - 0 = \sin(4\pi/MN),$$

$$y_3 = 2\cos(2\pi/MN)y_2 - y_1 = 2\cos(2\pi/MN) \times \sin(4\pi/MN) - \sin(2\pi/MN) = \sin(6\pi/MN) + \sin(2\pi/MN) - \sin(2\pi/MN) = \sin(6\pi/MN),$$

...

Вычисление значений  $\cos\theta_{\partial n}$  и  $\sin\theta_{\partial n}$  при условии  $\theta_{\partial n} = \theta_{\partial n}(nT/N)$  по рекуррентному выражению невозможно, поскольку расстояние между соседними значениями  $\theta_{\partial n}$  не одинаково. При отсутствии в ЦВУ стандартной программы можно выполнять вычисления  $\cos\theta_{\partial n}$  и  $\sin\theta_{\partial n}$ , используя известные разложения гармонических функций в степенные ряды:

$$\theta_{\partial n} = x, \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (11)$$

$$\cos x = \cos(k\pi/2 - \alpha) = \cos(k\pi/2)\cos\alpha + \sin(k\pi/2)\sin\alpha =$$

$$\sin x = \sin(k\pi/2 - \alpha) = \sin(k\pi/2)\cos\alpha - \cos(k\pi/2)\sin\alpha =$$

$$\begin{cases} \cos\alpha, & k = 4m, m = 0, 1, 2, \dots, \\ -\cos\alpha, & k = 4m+2, \\ \sin\alpha, & k = 4m+1, \\ -\sin\alpha, & k = 4m+3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sin\alpha, & k = 4m, m = 0, 1, 2, \dots, \\ \sin\alpha, & k = 4m+2, \\ \cos\alpha, & k = 4m+1, \\ -\cos\alpha, & k = 4m+3. \end{cases}$$

Учитывая, что скорость сходимости ряда тем выше, чем меньше абсолютное значение аргумента  $x$ , можно пользоваться формулами приведения, определив угол  $\alpha$  до ближайшего кратного  $\pi/2$ , значения угла:  $\theta_{\partial n} = x = k\pi/2 - \alpha$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $0 < |\alpha| < \pi/4$ , где  $k$  — ближайшее к числу  $x/(\pi/2)$  целое число,  $\alpha = k\pi/2 - x$ .

Тогда (формула вверху страницы).

При заданной точности вычисления  $\sin x$  и  $\cos x$  можно определить необходимое число членов степенного ряда, обеспечивающее ее при  $|\alpha| = \pi/4$ , и сохранить это число членов ряда при  $|\alpha| < \pi/4$ .

Поскольку функции  $\sin x$  и  $\cos x$  раскладываются в знакпеременные степенные ряды, величина ошибки их вычисления не превосходит модуля старшего из отброшенных членов ряда. Поэтому, задав допустимую ошибку вычисления  $\delta$ , для определения необходимого числа членов разложения в ряд функций  $\sin x$  и  $\cos x$  нужно решить соответственно неравенства:

$$\frac{(\pi/4)^{2n+1}}{(2n+1)!} < \delta \quad \text{и} \quad \frac{(\pi/4)^{2n}}{2n2!} < \delta.$$

При  $\delta < 10^{-4}$  в первом случае получаем  $2n+1 \geq 7$ , а во втором случае —  $2n \geq 7$ . Таким образом, для вычисления значений функций  $\sin x$  и  $\cos x$  с четырьмя верными десятичными знаками можно использовать усеченные ряды:

$$\theta_{\partial n} = x, \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}, \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}. \quad (12)$$

Вычисляя  $\sin(\pi/4)$  и  $\cos(\pi/4)$ , получаем в первом случае отрицательную ошибку  $-3,6 \times 10^{-5}$ , а во втором — такую же, но положительную ошибку  $+3,6 \times 10^{-5}$ .

Значения  $\cos(\theta_{\partial n} - 2\pi/3)$  и  $\cos(\theta_{\partial n} + 2\pi/3)$  проще вычислять по формулам:

$$\cos\left(\theta_{\partial n} - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos(\theta_{\partial n}) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta_{\partial n}), \cos\left(\theta_{\partial n} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos(\theta_{\partial n}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\theta_{\partial n}).$$

Все вычисления, необходимые для получения напряжений  $u_1, u_2, u_3$ , следует выполнять с периодом  $T_0 = 2\pi/\omega N = TN$ . Вычисленные

значения  $\cos(\theta_{\partial n}(nT_0)) \times \cos(\omega nT_0)$ ,  $\cos(\theta_{\partial n}(nT_0) - 2\pi/3) \times \cos(\omega nT_0)$ ,  $\cos(\theta_{\partial n}(nT_0) + 2\pi/3) \times \cos(\omega nT_0)$  с помощью трех преобразователей код-напряжение (ПКН) преобразуются соответственно в напряжения  $u_1, u_2, u_3$ .

Число разрядов ПКН должно удовлетворять заданной точности воспроизведения напряжений. Если допустима ошибка, вызванная квантованием по уровню, составляет  $\Delta\%$ , то необходимое число разрядов  $v$  определяется из уравнения:

$$100\%/(2^v - 1) \leq \Delta\%. \quad (13)$$

Если  $\Delta = 0,1\%$ , то  $2^v = 10^3 + 1$ ,  $v = \log_2(10^3 + 1) = 10$  ( $2^{10} = 1024$ ).

Таким образом, используя современные микропроцессоры (микроконтроллеры), имеющие в своем составе десятиразрядные ПКН, можно обеспечить высокую точность преобразования.

В результате на выходе ПКН получают ступенчатые косинусоидальные напряжения, модулированные по амплитуде множителями  $\cos(\theta_{\partial n}(nT_0))$ ,  $\cos(\theta_{\partial n}(nT_0) - 2\pi/3)$  и  $\cos(\theta_{\partial n}(nT_0) + 2\pi/3)$ . На рис. 5 представлено одно из напряжений, соответствующее  $\theta_{\partial n}(nT_0) = \text{const}$  и  $N = 16$ .

В действительности число  $N$  может иметь в сотни раз большее значение. При  $N = 10^3$  и частоте питания сельсина  $f = 50$  Гц получим  $T_0 = 1/50/10^3 = 20$  мкс. При современном быстродействии микропроцессора это вполне реальное время для выполнения вычислений. При числе точек квантования на периоде косинусоиды  $N = 10^3$  максимальная относительная высота ступеньки, соответствующая прохождению косинусоиды через 0, то есть максимальной крутизне кривой, равной 1, составляет  $2\pi/10^3 = 0,0063$ , или 0,63% от максимума косинусоиды, равного 1.

Ступенчатая косинусоида может быть сглажена в устройстве, согласующем ПКН с сельсином-приемником, которое представляет собой операционный усилитель (ОУ), изображенный на рис. 6.

Передаточная функция операционного усилителя:

$$W_{OY} = \frac{K_{OY}}{T_{OY}p + 1}, T_{OY} = RC,$$

$$K_{OY} = \frac{R}{r} = \frac{U_m}{U_{кпит}}. \quad (14)$$

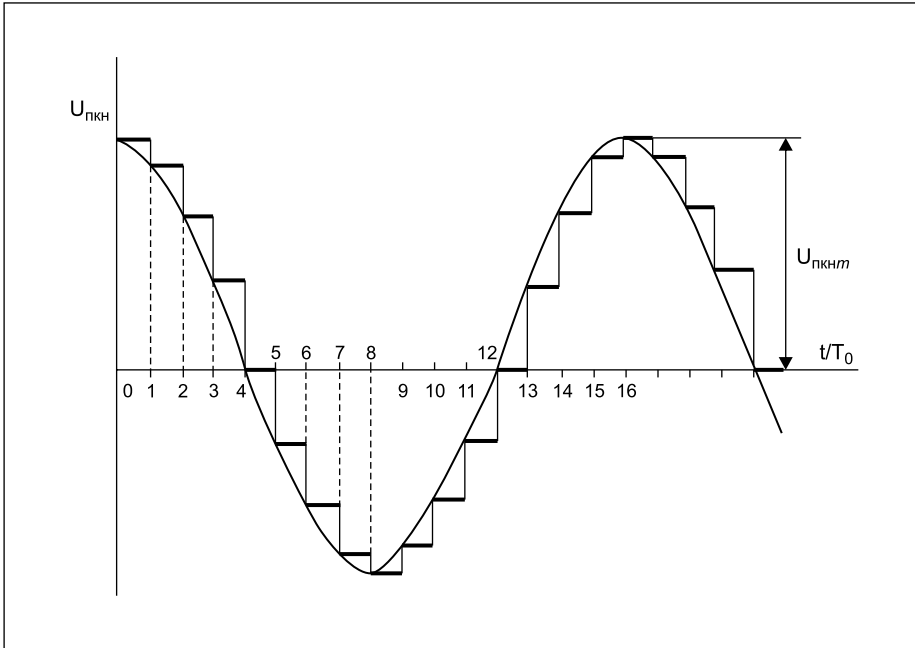


Рис. 5. Выходное напряжение ПКН

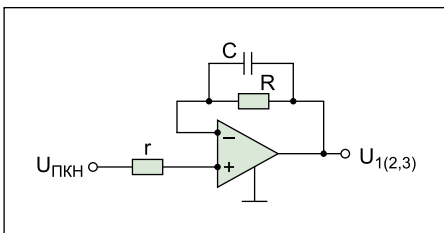


Рис. 6. Сглаживающий операционный усилитель

Величину коэффициента  $K_{OY}$  выбирают равной отношению амплитуды напряжений обмотки синхронизации ОС сельсина-приемника  $U_m$  и амплитуды напряжения на выходе ПКН  $U_{пкнт}$  (рис. 5).

Отклонение ступенчатой косинусоиды от гладкой косинусоиды, проходящей через середины ступенек, в худшем случае имеет вид пилообразной кривой  $\zeta$ , показанной на рис. 7, с амплитудой  $\zeta_m = (2\pi/N)/2 = \pi/N$ , то есть  $\zeta_m = 3,14 \times 10^{-3}$  при  $N = 10^3$ .

Операционный усилитель, представляющий собой апериодическое звено, сглаживает отклонение ступенчатой косинусоиды

от идеальной синусоиды. Пилообразные отклонения  $\zeta$  превращаются в гладкие, обозначенные на рис. 7 буквой  $\xi$ .

При  $T_{OY} \gg T_0$  ОУ для отклонений  $\zeta$  и  $\xi$  можно рассматривать как идеальное интегрирующее звено с дифференциальным уравнением:

$$T_{OY}(d\xi/dt) = \zeta. \quad (15)$$

Интегрируя уравнение ОУ на положительном полупериоде  $\xi$ , соответствующем изменению  $\zeta$  от  $-\xi_m$  до  $+\xi_m$ , получаем:

$$T_{OY} \int_0^{T_0/2} \frac{d\xi}{dt} dt = \zeta_m \int_0^{T_0/2} \left(1 - \frac{2t}{T_0}\right) dt$$

или

$$T_{OY} 2\xi_m = \zeta_m \left( t - \frac{t^2}{T_0} \right) \Big|_0^{T_0/2} = \zeta_m \frac{T_0}{4}.$$

Отсюда следует, что:

$$\xi_m/\zeta_m = T_0/8T_{OY}. \quad (16)$$

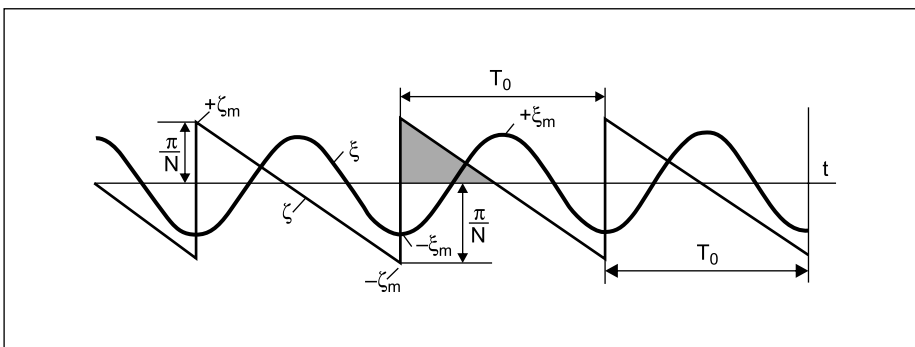


Рис. 7. Отклонение ступенчатой косинусоиды от идеальной синусоиды

Таким образом, уже при  $T_{OY}/T_0 = 5$  амплитуда отклонений выходной косинусоиды от идеальной уменьшается в 40 раз и при  $N = 10^3$  не превосходит:

$$\xi_m = \frac{\zeta_m T_0}{8T_{OY}} = \frac{\pi}{10^3 \times 8 \times 5} \approx 0,79 \times 10^{-4}$$

или 0,0079%.

Постоянная времени  $T_{OY} = 5T_0 = 5 \times 20 \times 10^{-6} = 10^{-4} \text{ с} = 0,1 \text{ мс}$  оказывается весьма небольшой: она в 200 раз меньше периода косинусоиды, равного  $T = 20 \text{ мс}$ . Следовательно, можно уменьшить  $N$ , что снизит требования к быстродействию микропроцессора.

Очевидно, что аналогично можно построить и электронную модель вращающегося трансформатора-датчика.

### Возможности использования электронной модели индукционного датчика

Помимо модели датчика как синусного механизма, можно использовать его при модернизации аналоговых следящих систем. Например, при замене аналогового вычислительного устройства (ВУ), определяющего необходимые углы поворота объекта управления на ЦВУ, можно сохранить непрерывную следящую систему. Для этого достаточно заменить ее сельсин-датчик его электронной моделью.

Использование электронной модели СД позволяет повысить точность измерителя рассогласования. Для этого можно определить погрешности измерителя рассогласования и добавлять к заданному значению  $\theta_d$  соответствующую ошибку с обратным знаком. Зависимость ошибки от угла можно аппроксимировать функцией и вычислять в ЦВУ ее значение для каждого угла  $\theta_d(nT_0)$ .

### Выводы

Электронную модель СД можно использовать как «синусный механизм» при испытаниях следящих систем.

Применение электронной модели СД позволяет повысить точность измерителя рассогласования.

Также электронная модель СД дает возможность согласовать цифровой источник задающего воздействия с аналоговой следящей системой, то есть СД может играть роль цифро-аналогового преобразователя. ■

### Литература

1. Евграфов В. Г., Коршунов А. И. Радиоавтоматика. Электромеханические элементы систем радиоавтоматики. Петродворец: ВВМИРЭ им. А. С. Попова, 2007.